提要 115：*Legendre* 方程式的解析

Legendre 方程式是定義爲：

$$\boxed{\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0}$$

其中 n 是實數。茲以一例說明其通解(*General Solution*)之解析過程。

範例一
試求 *Legendre* 方程式 $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ 之通解，其中 n 是實數。

解答：

令問題之解爲：

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

再代回原微分方程式 $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n(n+1)y=0$ ，則：

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)''\\&\quad-2x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)'\\&\quad+n(n+1)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=0\end{aligned} \tag{1}$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$\left(1-x^2\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)''-2x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)'+n(n+1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)=0 \tag{1'}$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\left(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots\right)\\&\quad-2x\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\right)\\&\quad+n(n+1)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{lllll}
2a_2 & +6a_3x & +12a_4x^2 & +20a_5x^3 & +\cdots \\
 & & -2a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots \\
 & -2a_1x & -4a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots \\
+n(n+1)a_0 & +n(n+1)a_1x & +n(n+1)a_2x^2 & +n(n+1)a_3x^3 & +\cdots=0
\end{array}$$

因 x^{r-2} 、 x^{r-1} 、 x^{r} 、 x^{r+1} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}
2a_2+n(n+1)a_0=0 \\
6a_3+[n(n+1)-2]a_1=0 \\
12a_4+[n(n+1)-6]a_2=0 \\
20a_5+[n(n+1)-12]a_3=0 \\
\qquad\vdots
\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}
2a_2+n(n+1)a_0=0, & (2a) \\
6a_3+(n+2)(n-1)a_1=0, & (2b) \\
12a_4+(n+3)(n-2)a_2=0, & (2c) \\
20a_5+(n+4)(n-3)a_3=0, & (2d) \\
\qquad\vdots
\end{cases}$$

由式(2*a*)知：

$$a_2=-\frac{n(n+1)}{2}a_0=-\frac{n(n+1)}{2!}a_0$$

再代入式(2*c*)，可知：

$$a_4=-\frac{(n+3)(n-2)}{12}a_2=\frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0$$

另外，由式(2*b*)知：

$$a_3=-\frac{(n+2)(n-1)}{6}a_1=-\frac{(n+2)(n-1)}{3!}a_1$$

再代入式(2*d*)，可得：

$$a_5=-\frac{(n+4)(n-3)}{20}a_3=\frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

最後再將a_0、a_1、a_2、…等代回原式，則：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\
&= a_0 + a_1 x - \frac{n(n+1)}{2!} a_0 x^2 - \frac{(n+2)(n-1)}{3!} a_1 x^3 \\
&\quad + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!} a_0 x^4 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!} a_1 x^5 + \cdots
\end{aligned}
$$

上式可再合併同類項，將答案改寫為：

$$
\boxed{
\begin{aligned}
y(x) &= a_0\left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + \cdots\right] \\
&\quad + a_1\left[x - \frac{(n+2)(n-1)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]
\end{aligned}
}
$$

上式即為 *Legendre* 方程式之通解，其中包含兩個未知常數a_0與a_1。

範例二

試求 *Legendre* 方程式$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$之通解。

解答：

【解法一】

由範例一知，本題相當於$n=3$，若將$n=3$代入範例一中之結果，則：

$$
\begin{aligned}
y(x)&=a_0\left[1-\frac{3(3+1)}{2!}x^2+\frac{(3-2)3(3+1)(3+3)}{4!}x^4+\cdots\right]\\
&\quad+a_1\left[x-\frac{(3+2)(3-1)}{3!}x^3+\frac{(3-3)(3-1)(3+2)(3+4)}{5!}x^5+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

上式可進一步化簡為：

$$\boxed{y(x)=a_0\left(1-6x^2+3x^4+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{5}{3}x^3\right)}$$

此即為問題之通解。

【解法二】

令問題之解為：

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

再代回原微分方程式$(1-x^2)y''-2xy'+12y=0$，則：

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)''\\
&\quad-2x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)'\\
&\quad+12\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

上式係將級數解之相加內容詳細表達出來，若寫成相加之簡寫符號，則應表爲：

$$\left(1-x^2\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)''-2x\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)'+12\left(\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m\right)=0 \qquad (1')$$

式(1)微分後，可得：

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)\left(2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots\right)\\&\quad-2x\left(a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\right)\\&\quad+12\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)=0\end{aligned}$$

再整理出容易合併同類項之型式：

$$\begin{array}{llllll} 2a_2 & +6a_3x & +12a_4x^2 & +20a_5x^3 & +\cdots & \\ & & -2a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots & \\ & -2a_1x & -4a_2x^2 & -6a_3x^3 & -\cdots & \\ +12a_0 & +12a_1x & +12a_2x^2 & +12a_3x^3 & +\cdots=0 & \end{array}$$

因 x^{r-2} 、 x^{r-1} 、 x^r 、 x^{r+1} 等互爲線性獨立，且其和爲零，故其係數應各自等於零：

$$\begin{cases}2a_2+12a_0=0\\6a_3+(12-2)a_1=0\\12a_4+(12-6)a_2=0\\20a_5+(12-12)a_3=0\\\qquad\vdots\end{cases}$$

上式可再整理爲：

$$\begin{cases}2a_2+12a_0=0, & (2a)\\6a_3+10a_1=0, & (2b)\\12a_4+6a_2=0, & (2c)\\20a_5=0, & (2d)\\\qquad\vdots\end{cases}$$

由式(2*a*)知：

$$a_2=-6a_0$$

再代入式(2*c*)，可知：

$$a_4 = -\frac{1}{2}a_2 = 3a_0$$

另外，由式(2*b*)知：

$$a_3 = -\frac{5}{3}a_1$$

再代入式(2*d*)，可得：

$$a_5 = 0$$

最後再將 a_0 、 a_1 、 a_2 、…等代回原式，則：

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x - 6a_0 x^2 - \frac{5}{3}a_1 x^3 + 3a_0 x^4 + \cdots \end{aligned}$$

上式可再合併同類項，將答案改寫爲：

$$\boxed{y(x) = a_0\left(1 - 6x^2 + 3x^4 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)}$$

上式即爲 *Legendre* 方程式之通解，其中包含兩個未知常數 a_0 與 a_1 。兩種方法所得結果相同。