提要 111：冪級數解之存在性定理

定理：冪級數解之存在性定理
只要二階微分方程式 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ 中之 $p(x)$、$q(x)$、$r(x)$ 可以冪級數加以表示，則此微分方程式會有冪級數解： $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$，其中收斂半徑(*Radius of Convergence*) $R>0$。

這一簡短之定理，能幫助讀者很快判斷出所面對之問題是否有解。一般而言，大自然的問題都會有解的；凡解不出答案的問題，很多都是因爲該問題是屬於憑空想像的虛擬問題所致！

【一點點的心得與說明】

日常生活中所面對的工程問題等，在時間上或空間上常是短期的或局部區域內的。例如要蓋一棟樓時，工程師在作地質鑽探時，僅需瞭解工程基地及其鄰近區域的地質條件；日常生活中，用餐、睡眠、工作等都是在一段時間內完成的。

因此我們在完成一個函數的級數時，亦常讓級數僅在一個有限的範圍內收斂即可，因爲這樣就夠用了。當然，若一個級數之收斂範圍是無限大，那當然是令人振奮的，因其適用對象更多或適用範圍更廣，但這樣的級數並不是很多，常見者爲以下三個級數：

- $\boxed{e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\text{，}x\in R\text{。}}$

- $\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^5}{7!}+-\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\text{，}x\in R\text{。}}$

- $\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}\text{，}x\in R\text{。}}$