提要 110：冪級數解之運算規則

前一單元是提及冪級數(*Power Series*)之下標平移原則，尚有一些其他相關運算規則值得列舉說明之。

1. 逐項微分：冪級數作微分運算時，每一個相加之項次均需微分。舉例說明如後。若 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ ，$|x-x_0|<R$ ，則 $y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty} m a_m (x-x_0)^{m-1}$ 。

2. 逐項相加：兩個冪級數作相加運算時，若 $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ 、$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-x_0)^m$ ，則 $f(x)+g(x)=\sum_{m=0}^{\infty} (a_m+b_m)(x-x_0)^m$ 。

3. 逐項相乘：若 $f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ 、$g(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-x_0)^m$ ，則

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x-x_0)^m\right] \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)(x-x_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)(x-x_0)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

4. 係數為零的原則：若冪級數之收斂半徑大於零，且冪級數 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ 之函數值爲零，則必定是冪級數中之係數 a_m 皆爲零。

5. 下標平移原則：

$$
\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^m + \sum_{m=1}^{\infty} 2m a_m x^{m-1} = \sum_{s=2}^{\infty} s(s-1) a_s x^s + \sum_{s=0}^{\infty} 2(s+1) a_{s+1} x^s
$$

6. 係數對應相等原則：若兩級數對應相等，則必定是其係數亦對應相等。

範例一

若級數$3a+(b-c)x^2+5x^3=6+2bx-3x^2+(c+d)x^3$，試求 a、b、c、d 之值。

解答：

由級數之基本性質知，若兩級數對應相等，則必定是其係數亦對應相等，故：

$$\begin{cases} 3a=6 \\ 2b=0 \\ b-c=-3 \\ c+d=5 \end{cases}$$

上式可進一步加以解析，求出 a、b、c、d 之值，如以下所示：

$$\boxed{\begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=3 \\ d=2 \end{cases}}$$

此即為問題之解。

範例二
若 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$ ，試求其兩次微分後之結果。

解答：

由題意知 $y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$ ，其展開式爲：

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\cdots$$

故一次微分後，其結果爲：

$$y'(x)=\sum_{m=0}^{\infty}ma_m(x-x_0)^{m-1}=0+a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\cdots$$

第二次微分後，其結果爲：

$$y''(x)=\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m(x-x_0)^{m-2}=0+0+2a_2+6a_3(x-x_0)+12a_4(x-x_0)^2+\cdots$$

因爲 $m=0$ 與 $m=1$ 之值爲零，故上式亦可進一步化簡爲：

$$\boxed{y''(x)=\sum_{m=2}^{\infty}m(m-1)a_m(x-x_0)^{m-2}=2a_2+6a_3(x-x_0)+12a_4(x-x_0)^2+\cdots}$$

此即爲問題之解。