

提要 109：級數之下標平移原則

已知冪級數係表為 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ ， $|x-x_0| < R$ 。其中之係數(Coefficient) a_m 及冪次(Power) $x-x_0$ 之次方等，均是以符號 m 加以表示，且 m 之計算方式是由 $m=0$ 開始。剛才所提及的兩個重點是：

- (1) 級數之下標是以符號 m 加以表示。
- (2) m 之計算方式是由 $m=0$ 開始。

但這兩個部分是可以有所改變的，只要能夠維持原冪級數所欲表達之函數型式即可。例如：

- (1) $a_1x + a_2x^2$ 可寫成 $\sum_{m=1}^2 a_m x^m$ ，也可以將符號 m 換成符號 s ，亦即 $a_1x + a_2x^2$ 亦可表為 $\sum_{s=1}^2 a_s x^s$ 。
- (2) m 之計算方式也不一定要由 $m=1$ 開始，也可以考慮由 $m=10$ 開始，但不管怎麼改，其本質 $a_1x + a_2x^2$ 必須保持不變，故 $a_1x + a_2x^2 = \sum_{m=1}^2 a_m x^m = \sum_{m=10}^{11} a_{m-9} x^{m-9}$ 。以上所述即為下標平移之原則。

範例一

若擬將級數 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$ 改寫為 $\sum_{s=3}^{\infty} a_{s+3} (x-x_0)^{s+3}$ ，請問是否正確？若所調整的級數表達方式不正確，請寫出正確結果。

解答：

由題意知，題目所給的原始級數展開後，可表為：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots \quad (\text{a})$$

但改寫後的級數 $\sum_{s=3}^{\infty} a_{s+3} (x-x_0)^{s+3}$ 展開後，如以下所示：

$$\sum_{s=3}^{\infty} a_{s+3} (x-x_0)^{s+3} = a_6(x-x_0)^6 + a_7(x-x_0)^7 + a_8(x-x_0)^8 + \dots \quad (\text{b})$$

顯然，式(a)與式(b)並不相同，故題意中之改寫方式並不正確。正確的調整結果應是 $\sum_{s=3}^{\infty} a_{s-3} (x-x_0)^{s-3}$ ，因其展開結果如以下所示：

$$\sum_{s=3}^{\infty} a_{s-3} (x-x_0)^{s-3} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad (\text{c})$$

式(c)確實與式(a)相同，故正確的調整方式應是 $\sum_{s=3}^{\infty} a_{s-3} (x-x_0)^{s-3}$ 。