提要 108：認識級數解之收斂半徑的解法(二)

已知冪級數(*Power Series*)係表爲$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$，$|x-x_0|<R$。此級數解之**收斂半徑(*Radius of Convergence*) *R*** 的第二個計算方法是根值審斂法，即：

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}}$$

其中a_m爲級數之第 m 項的係數。茲以數個範例說明其應用方式。

範例一
試解出幾何級數(*Geometric Series*)$\frac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1+x+x^2+x^3+\cdots$之收斂半徑(*Radius of Convergence*) R。

解答：

由題意知，題目所給幾何級數之中心點x_0爲零，已知收斂半徑 R 的計算方式可採用根值審斂法，即$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$。觀察幾何級數得知，第 m 項係數$a_m=1$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|1|}}=\frac{1}{1}=1$$

亦即此級數在$|x-0|<1$(也就是$\boxed{|x|<1}$、或$\boxed{-1<x<1}$)的範圍內是收斂的。

範例二

試解出級數 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{8^m}x^{3m}=1-\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{64}-\frac{x^9}{512}+-\cdots$ 之收斂半徑 (*Radius of Convergence*) R。

解答：

此題是常考之類型，因題意中級數之冪次項爲 x^3，而不是 x。已知收斂半徑 R 的計算方式可採用根值審斂法，即 $R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$。由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{8^m}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|\frac{(-1)^m}{8^m}\right|}}=8$$

亦即此級數在 $|x^3-0|<8$ (不是 $|x-0|<8$ 哦)的範圍內是收斂的。因 $|x^3|<8$，故問題之收斂範圍爲 $\boxed{|x|<2}$ 或 $\boxed{-2<x<2}$。

範例三

試解出級數 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{16^m}x^{4m}=1-\frac{x^4}{16}+\frac{x^8}{256}-\frac{x^{12}}{4096}+-\cdots$ 之收斂半徑 (*Radius of Convergence*) R。

解答：

此題是常考之類型，因題意中級數之冪次項爲 x^4，而不是 x。已知收斂半徑 R 的計算方式可採用根値審斂法，即 $R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$。由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{16^m}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|\frac{(-1)^m}{16^m}\right|}}=16$$

亦即此級數在 $|x^4-0|<16$ (不是 $|x-0|<16$ 哦)的範圍內是收斂的。因 $|x^4|<8$，故問題之收斂範圍爲 $\boxed{|x|<2}$ 或 $\boxed{-2<x<2}$。

範例四
試解出級數 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{27^m}x^{3m}=1-\frac{x^3}{27}+\frac{x^6}{729}-\frac{x^9}{19683}+-\cdots$ 之收斂半徑(*Radius of Convergence*) R。

解答：

此題是常考之類型，因題意中級數之冪次項爲 x^3，而不是 x。已知收斂半徑 R 的計算方式可採用根値審斂法，即 $R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$。由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{27^m}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}=\frac{1}{\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|\frac{(-1)^m}{27^m}\right|}}=27$$

亦即此級數在 $|x^3-0|<27$ (不是 $|x-0|<27$ 哦)的範圍內是收斂的。因 $|x^3|<27$，故問題之收斂範圍爲 $\boxed{|x|<3}$ 或 $\boxed{-3<x<3}$。