提要 107：認識級數解之收斂半徑的解法(一)

已知**冪級數(*Power Series*)**係表爲 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m$，$|x-x_0|<R$。此級數解之**收斂半徑(*Radius of Convergence*) *R*** 的計算方法有許多種，第一個最常用的計算方法是比值審斂法，即：

$$\boxed{R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|}$$

其中 a_m 和 a_{m+1} 分別爲級數之第 m 項和第 $m+1$ 項係數。茲以數個範例說明其應用方式。

範例一
試解出冪級數 $\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m$ 之收斂半徑(*Radius of Convergence*) *R*。

解答：

由題意知，此級數之中心點 x_0 爲零，已知收斂半徑 R 可採用比值審斂法求出，即 $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，其中第 m 項係數 $a_m=m!$，故第 $m+1$ 項係數 $a_{m+1}=(m+1)!$，因此，收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{m!}{(m+1)!}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{m!}{(m+1)m!}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{m+1}\right|=0$$

亦即 $\boxed{\text{此級數僅在 } x=0 \text{ (中心點)收斂}}$，這種僅在一個點上收斂之級數是無用處的！

範例二

試解出幾何級數(*Geometric Series*) $\frac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 之收斂半徑(*Radius of Convergence*) R。

解答：

由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 為零，已知收斂半徑 R 可採用比值審斂法計算出來，即 $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，觀察幾何級數得知，第 m 項係數 $a_m=1$，而第 m+1 項係數 $a_{m+1}=1$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{1}\right|=1$$

亦即此級數在 $|x-0|<1$ 收斂，也就是 $\boxed{|x|<1}$、或 $\boxed{-1<x<1}$ 的範圍內是收斂的。

【註】 $x=\pm1$ 時，幾何級數都不會收斂。

範例三
試解出指數函數 $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ 之收斂半徑 (*Radius of Convergence*) R。

解答：

已知收斂半徑 R 的計算方式可採用比值審斂法，即 $R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 為零，第 m 項係數 $a_m = \frac{1}{m!}$，而第 $m+1$ 項係數 $a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{m!}}{\frac{1}{(m+1)!}}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{m!}}{\frac{1}{(m+1)(m!)}}\right| = \lim_{m\to\infty}|m+1| = \infty$$

亦即此級數在 $|x-0| < \infty$ 的範圍內是收斂的，也就是 $\boxed{|x| < \infty}$、或 $\boxed{-\infty < x < \infty}$ 的範圍內是收斂的。這種在整個實數軸上均是收斂的級數是最棒的級數！

範例四

試解出級數 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{8^m}x^{3m}=1-\frac{x^3}{8}+\frac{x^6}{64}-\frac{x^9}{512}+-\cdots$ 之收斂半徑(*Radius of Convergence*) R。

解答：

此題是常考之類型，因題意中級數之冪次項爲 x^3，而不是 x。已知收斂半徑 R 的計算方式可採用比值審斂法，即 $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{8^m}$，而第 $m+1$ 項係數 $a_{m+1}=\frac{(-1)^{m+1}}{8^{m+1}}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{8^m}}{\frac{(-1)^{m+1}}{8^{m+1}}}\right|=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{8^m}}{\frac{(-1)(-1)^m}{8(8^m)}}\right|=\lim_{m\to\infty}|-8|=8$$

亦即此級數在 $|x^3-0|<8$ (不是 $|x-0|<8$ 哦)的範圍內是收斂的。因 $|x^3|<8$，故問題之收斂範圍爲 $\boxed{|x|<2}$ 或 $\boxed{-2<x<2}$。

範例五
試解出級數 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{4^m}x^{2m}=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^6}{64}+-\cdots$ 之收斂半徑 (*Radius of Convergence*) R。

解答：

此題是常考之類型，因題意中級數之冪次項爲 x^2，而不是 x。已知收斂半徑 R 的另一計算方式爲根値審斂法，即 $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$，此一方法下一單元會詳細說明。由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\dfrac{(-1)^m}{4^m}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}=\frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\sqrt[m]{\left|\dfrac{(-1)^m}{4^m}\right|}}=4$$

亦即此級數在 $|x^2-0|<4$ (不是 $|x-0|<4$ 哦)的範圍內是收斂的。因 $|x^2|<4$，故問題之收斂範圍爲 $\boxed{|x|<2}$ 或 $\boxed{-2<x<2}$。

範例六
試解出級數 $\cos x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots$ 之收斂半徑 (*Radius of Convergence*) *R*。

解答：

已知收斂半徑 R 的計算方式可採用比值審斂法，即 $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{(2m)!}$，而第 $m+1$ 項係數 $a_{m+1}=\frac{(-1)^{m+1}}{[2(m+1)]!}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$\begin{aligned}
R&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m)!}}{\frac{(-1)^{m+1}}{[2(m+1)]!}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m)!}}{\frac{(-1)^m(-1)}{(2m+2)!}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^m}{(2m)!}}{\frac{(-1)^m(-1)}{(2m+2)(2m+1)[(2m)!]}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|-(2m+2)(2m+1)\right|\\
&=\infty
\end{aligned}$$

亦即此級數在 $|x-0|<\infty$ 的範圍內是收斂的，也就是 $\boxed{|x|<\infty}$、或 $\boxed{-\infty<x<\infty}$ 的範圍內是收斂的。

範例七

試解出級數 $\sin x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots$ 之收斂半徑(*Radius of Convergence*) R。

解答：

已知收斂半徑 R 的計算方式可採用比值審斂法，即 $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$，由題意知，題目所給幾何級數之中心點 x_0 爲零，第 m 項係數 $a_m=\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}$，而第 $m+1$ 項係數 $a_{m+1}=\frac{(-1)^{m+1}}{\left[2(m+1)+1\right]!}$，故收斂半徑 R 可計算如下：

$$
\begin{aligned}
R&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}}{\dfrac{(-1)^{m+1}}{\left[2(m+1)+1\right]!}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}}{\dfrac{(-1)^m(-1)}{(2m+3)!}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}}{\dfrac{(-1)^m(-1)}{(2m+3)(2m+2)\left[(2m+1)!\right]}}\right|\\
&=\lim_{m\to\infty}\left|-(2m+3)(2m+2)\right|\\
&=\infty
\end{aligned}
$$

亦即此級數在 $|x-0|<\infty$ 的範圍內是收斂的，也就是在 $\boxed{|x|<\infty}$、或 $\boxed{-\infty<x<\infty}$ 的範圍內是收斂的。