提要 105：二階 ODE 之冪級數解法

首先說明二階微分方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$之解的存在性定理，再以一個範例說明**冪級數解法**(*Power Series Method*)之應用方式。

二階微分方程式之解的存在性定理
只要微分方程式中之係數 $p(x)$、$q(x)$與非齊性項 $r(x)$可以冪級數表示，則二階微分方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}+p(x)\dfrac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$有冪級數解存在。

範例一
試解出微分方程式$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$之通解(*General Solution*)。

解法❶：

本題擬採用提要 23~25 所提常係數齊性微分方程式的解題概念。已知原微分方程式爲$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$，這是一個係數爲常數之齊性微分方程式，故可令問題之解爲：

$$y=e^{\lambda x}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。然後，將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可再進一步表爲：

$$\left(\lambda^2+1\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲$e^{\lambda x}\neq 0$，所以：

$$\lambda^2+1=0$$

上式稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式可求出特徵根：

$$\lambda=-i,\ i$$

故問題之解可表爲：

$$y=e^{-ix}\quad 或\quad y=e^{ix}$$

因原微分方程式爲線性且齊性之微分方程式，故可應用重疊原理(*Superposition Principle*)，將問題之解分別乘以倍數常數C_1與C_2，亦即以下所示方程式亦爲原微分方程式之解，稱爲問題之通解：

$$\boxed{y=C_1e^{-ix}+C_2e^{ix}} \tag{a}$$

上式已算是問題之通解了。然亦可進一步引用 *Euler* 公式$e^{\pm it}=\cos t\pm i\sin t$，將此通解進一步加以化簡：

$$\begin{aligned} y&=C_1\left(\cos x-i\sin x\right)+C_2\left(\cos x+i\sin x\right)\\ &=\left(C_1+C_2\right)\cos x-i\left(C_1-C_2\right)\sin x \end{aligned}$$

再令$C_1^*=C_1+C_2$、$C_2^*=-i\left(C_1-C_2\right)$，則問題之通解可進一步表示成：

$$\boxed{y=C_1^*\cos x+C_2^*\sin x} \tag{b}$$

最後，再引用 $\cos x$ 與 $\sin x$ 之 *Maclaurin* 級數表示法，將式(b)修改爲：

$$\boxed{y=C_1^*\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+-\cdots\right)+C_2^*\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^5}{7!}+-\cdots\right)} \tag{c}$$

解法❷：

茲引用冪級數法(*Power Series Method*)解析問題，令問題之冪級數解爲：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d^2\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots\right)}{dx^2} + \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots\right) = 0$$

再作微分，則：

$$\left(0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots\right) + \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) = 0$$

然後，作同類項合併：

$$\left(2a_2 + a_0\right) + \left(6a_3 + a_1\right)x + \left(12a_4 + a_2\right)x^2 + \left(20a_5 + a_3\right)x^3 + \cdots = 0$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 2a_2 + a_0 = 0 \\ 6a_3 + a_1 = 0 \\ 12a_4 + a_2 = 0 \\ 20a_5 + a_3 = 0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

在整理係數間之關係時，是選取 a_0 與 a_1 爲獨立係數，爲什麼選取兩個係數爲獨立係數？因爲原微分方程式是二階微分方程式，若以積分方法求解，會出現兩個積分常數，故需在無限多個係數 $a_m \left(m = 0, 1, 2, 3, \cdots\right)$ 當中，選出兩個係數爲獨立係數。爲方便起見，通常選取第一個係數 a_0 與第二個係數 a_1 爲獨立係數，再找出

其他係數與a_0、a_1的關係即可，如以下所示：

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{1}{2}a_0 = -\dfrac{1}{2!}a_0 \\ a_3 = -\dfrac{1}{6}a_1 = -\dfrac{1}{3!}a_1 \\ a_4 = -\dfrac{1}{12}a_2 = \dfrac{1}{24}a_0 = \dfrac{1}{4!}a_0 \\ a_5 = -\dfrac{1}{20}a_3 = \dfrac{1}{120}a_1 = \dfrac{1}{5!}a_1 \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

基於此，再將各個係數與獨立係數a_0、a_0的關係代回冪級數解中，即可求出問題的通解，如以下所示：

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!}a_0 x^2 - \frac{1}{3!}a_1 x^3 + \frac{1}{4!}a_0 x^4 + \frac{1}{5!}a_1 x^5 + \cdots$$

茲再分別將係數a_0、a_1提出來加以整理，則問題之通解爲：

$$\boxed{y = a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots\right)}$$

以上所示之通解與式(c)完全相同。由此可知，冪級數解法適用於解析二階微分方程式。

範例二
試解出微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ 之通解(*General Solution*)。

解法❶：

同理，本題擬採用提要 23~25 所提常係數齊性微分方程式的解題概念。已知原微分方程式爲 $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$，這是一個係數爲常數之齊性微分方程式，故可令問題之解爲：

$$y=e^{\lambda x}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。然後，將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}-\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可再進一步表爲：

$$\left(\lambda^2-1\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}\neq 0$，所以：

$$\lambda^2-1=0$$

上式稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式可求出特徵根：

$$\lambda=-1,\ 1$$

故問題之解可表爲：

$$y=e^{-x} \quad \text{或} \quad y=e^{x}$$

因原微分方程式爲線性且齊性之微分方程式，故可應用重疊原理(*Superposition Principle*)，將問題之解分別乘以倍數常數C_1與C_2，亦即以下所示方程式亦爲原微分方程式之解，稱爲問題之通解：

$$\boxed{y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}} \tag{a}$$

上式已算是問題之通解了。最後，再引用$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$之 *Maclaurin* 級數表示法，將式(a)修改爲：

$$\boxed{y=C_1\left[1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\frac{(-x)^3}{3!}+\frac{(-x)^4}{4!}+\cdots\right]+C_2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)} \tag{b}$$

或

$$\boxed{y=C_1\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots\right)+C_2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)} \tag{c}$$

解法❷：

茲引用冪級數法(*Power Series Method*)解析問題，令問題之冪級數解爲：

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots$$

將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d^2\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\right)}{dx^2}-\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\cdots\right)=0$$

再作微分，則：

$$\left(0+0+2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots\right)+\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\right)=0$$

然後，作同類項合併：

$$\left(2a_2+a_0\right)+\left(6a_3+a_1\right)x+\left(12a_4+a_2\right)x^2+\left(20a_5+a_3\right)x^3+\cdots=0$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 2a_2+a_0=0 \\ 6a_3+a_1=0 \\ 12a_4+a_2=0 \\ 20a_5+a_3=0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

在整理係數間之關係時，是選取a_0與a_1爲獨立係數，爲什麼選取兩個係數爲獨立係數？因爲原微分方程式是二階微分方程式，若以積分方法求解，會出現兩個積分常數，故需在無限多個係數$a_m\left(m=0,1,2,3,\cdots\right)$當中，選出兩個係數爲獨立係數。爲方便起見，通常選取第一個係數a_0與第二個係數a_1爲獨立係數，再找出其他係數與a_0 、 a_1的關係即可，如以下所示：

$$\begin{cases} a_2=-\dfrac{1}{2}a_0=-\dfrac{1}{2!}a_0 \\ a_3=-\dfrac{1}{6}a_1=-\dfrac{1}{3!}a_1 \\ a_4=-\dfrac{1}{12}a_2=\dfrac{1}{24}a_0=\dfrac{1}{4!}a_0 \\ a_5=-\dfrac{1}{20}a_3=\dfrac{1}{120}a_1=\dfrac{1}{5!}a_1 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

基於此，再將各個係數與獨立係數a_0 、 a_0的關係代回冪級數解中，即可求出問題的通解，如以下所示：

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{1}{2!} a_0 x^2 - \frac{1}{3!} a_1 x^3 + \frac{1}{4!} a_0 x^4 + \frac{1}{5!} a_1 x^5 + \cdots$$

茲再分別將係數a_0、a_1提出來加以整理，則問題之通解為：

$$\boxed{y = a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots\right)}$$

以上所示之通解與式(c)完全相同。由此可知，冪級數解法適用於解析二階微分方程式。