提要 104：一階 ODE 之冪級數解法

首先說明一階微分方程式$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=r(x)$之解的存在性定理，再以兩個範例說明冪級數解法之應用方式。

一階微分方程式之解的存在性定理
只要 $p(x)$ 與 $r(x)$ 可以冪級數(*Power Series*)表示，則一階微分方程式$\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=r(x)$有冪級數解存在。

範例一
試解出微分方程式$\dfrac{dy}{dx}-y=0$之通解(*General Solution*)。

解法❶：

爲讓讀者融會貫通，我們擬先以提要 9 的解法說明問題之通解。之前有說明過解一階 ODE 的第二的方法---變數可分離之 ODE 的解法，這就是現在所要介紹的解法。茲再將解題精神描述一遍：

若一階 ODE 可表爲等號左邊僅與應變數(*Dependent Variable*) y 有關，而等號右邊僅與自變數(*Independent Variable*) x 有關，亦即：

$$\boxed{g(y)\frac{dy}{dx}=f(x)}$$

則可直接對 x 變數作積分，即：

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx+C$$

上式可化簡爲：

$$\boxed{\int g(y)dy=\int f(x)dx+C}$$

已知問題之一階微分方程式可表爲：

$$\frac{dy}{dx}=y$$

上式可改寫爲等號左邊與應變數(*Dependent Variable*) y 有關，而等號右邊則與自變數(*Independent Variable*) x 有關：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=1$$

然後再同時對自變數 x 作不定積分：

$$\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx=\int(1)dx+C$$

因係對問題作不定積分，所以上式需加上積分常數 C。上式可再改寫爲：

$$\int\frac{1}{y}dy=\int dx+C$$

因此等號左邊是對 y 作積分，而等號右邊是對 x 作積分。上式中之兩個積分應是容易的，積分後，結果爲：

$$\boxed{\ln y=x+C} \tag{a}$$

其中之變數 y 不必加絕對值也可以，因廣義而言，自然對數函數中之參數是可以安放複數的。式(a)已算是原微分方程式之通解了，然而，爲與冪級數解作比較，擬對式(a)作適當之化簡。首先，式(a)等號左右兩邊同時取自然指數的運算：

$$\exp(\ln y)=\exp(x+C)$$

其中之自然指數與自然對數是相反的運算，可以互相抵消；而 $\exp(x+C)$ 可改寫爲 $e^{x+C}=e^xe^C$ ，請注意， $e^{x+C}\neq e^x+e^C$ ，很多同學都會犯這樣的錯誤！基於此，式(a)可改寫爲：

$$y=e^Ce^x$$

因 e^C 表一個與積分常數 C 有關之常數，故可以另一個常數代號 C^* 表示它，這樣原微分方程式之通解就又可以表爲：

$$\boxed{y = C^* e^x} \tag{b}$$

之前有提醒需記下四個函數的 *Maclaurin* 級數，其中有一個現在需要引用一下，亦即：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

因此，式(b)又可表爲：

$$\boxed{y = C^*\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)} \tag{c}$$

由以上討論知，式(a)、式(b)與式(c)均表原微分方程式之通解。對了，請讀者注意，一次微分的方程式解好後，會出現一個積分常數；若是解析兩次微分(二階)的微分方程式，則會出現兩個積分常數。

解法❷：

關於第二種解法，乃是擬採用提要 23~25（在工程數學(一)100 提要中）所提常係數齊性微分方程式的解題概念。已知原微分方程式爲 $\dfrac{dy}{dx} - y = 0$，這是一個係數爲常數之齊性微分方程式，故可令問題之解爲：

$$y = e^{\lambda x}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。然後，將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} - \left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可再進一步表爲：

$$(\lambda-1)e^{\lambda x}=0$$

因爲$e^{\lambda x}\neq 0$，所以：

$$\lambda-1=0$$

上式稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式可求出特徵根：

$$\lambda=1$$

故問題之解可表爲：

$$y=e^{x}$$

因原微分方程式爲線性且齊性之微分方程式，故可將問題之解乘以倍數常數C^{*}，亦即下式亦爲原微分方程式之解，稱爲問題之通解：

$$\boxed{y=C^{*}e^{x}}$$

以上所示之通解與式(b)完全相同。

解法❸：

茲引用冪級數法(*Power Series Method*)解析問題，令問題之冪級數解爲：

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$

將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)}{dx}-\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)=0$$

再作微分，則：

$$\left(0+a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots\right)-\left(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots\right)=0$$

再作同類項合併的動作：

$$\left(a_1-a_0\right)+\left(2a_2-a_1\right)x+\left(3a_3-a_2\right)x^2+\left(4a_4-a_3\right)x^3+\cdots=0$$

比較係數知：

$$\begin{cases} a_1-a_0=0 \\ 2a_2-a_1=0 \\ 3a_3-a_2=0 \\ 4a_4-a_3=0 \\ \quad\quad\vdots \end{cases}$$

在整理係數間之關係時，是選取a_0爲獨立係數，爲什麼僅選取一個係數爲獨立係數？因爲原微分方程式是一階微分方程式，僅微分一次，若以積分方法求解，僅會出現一個積分常數，故只需在無限多個係數$a_m\left(m=0,1,2,3,\cdots\right)$當中，選出一個係數爲獨立係數即可。爲方便起見，通常選取第一個係數a_0爲獨立係數，再找出其他係數與a_0的關係，如以下所示：

$$\begin{cases} a_1=a_0 \\ a_2=\dfrac{1}{2}a_1=\dfrac{1}{2}a_0=\dfrac{1}{2!}a_0 \\ a_3=\dfrac{1}{3}a_2=\dfrac{1}{(3)(2)}a_0=\dfrac{1}{3!}a_0 \\ a_4=\dfrac{1}{4}a_3=\dfrac{1}{(4)(3)(2)}a_0=\dfrac{1}{4!}a_0 \\ \quad\quad\quad\vdots \end{cases}$$

基於此，再將各個係數與獨立係數a_0的關係代回冪級數解中，即可求出問題的通解：

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{1}{2!}a_0 x^2 + \frac{1}{3!}a_0 x^3 + \frac{1}{4!}a_0 x^4 + \cdots$$

再將係數 a_0 提出來，則問題之通解爲：

$$\boxed{y = a_0\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right)}$$

以上所示之通解與式(c)完全相同。

範例二
試解出微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2xy$ 之通解(*General Solution*)。

解法❶：

同理，爲讓讀者融會貫通，我們擬先以提要 9 的解法說明問題之通解。可採用解析一階 ODE 的第二的方法---變數可分離之 ODE 的解法。其解題精神之前已描述一遍，不再多言。

已知問題之一階微分方程式可表爲：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2x$$

上式已改寫爲等號左邊僅應變數(*Dependent Variable*) y 有關，而等號右邊則僅與自變數(*Independent Variable*) x 有關。然後，再同時對自變數 x 作不定積分。因係對問題作不定積分，所以上式需加上積分常數 C：

$$\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}dx = \int 2x dx + C$$

上式可再改寫爲：

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x dx + C$$

因此，上式等號左邊是對 y 作積分，而等號右邊是對 x 作積分。上式中之兩個積分式積分後，結果爲：

$$\boxed{\ln y = x^2 + C} \tag{a}$$

其中之變數 y 不必加絕對值也可以，因廣義而言，自然對數函數中之參數是可以安放複數的。式(a)已算是原微分方程式之通解了。然而，爲與冪級數解相互比較，式(a)需作適當之化簡。首先，式(a)等號左右兩邊同時取自然指數的運算：

$$\exp(\ln y) = \exp(x^2 + C)$$

其中之自然指數與自然對數是相反的運算，可以互相抵消；而 $\exp(x^2 + C)$ 可改寫爲 $e^{x^2+C} = e^{x^2} e^{C}$，請注意，$e^{x^2+C} \neq e^{x^2} + e^{C}$，很多同學都會犯這樣的錯誤！基於此，式(a)可進一步改寫爲：

$$y = e^{C} e^{x^2}$$

因 e^{C} 表一個與積分常數 C 有關之常數，故可以另一個常數代號 C^* 表示它，這樣原微分方程式之通解就又可以表爲：

$$\boxed{y = C^* e^{x^2}} \tag{b}$$

之前有提醒需記下四個基本函數的 *Maclaurin* 級數，其中有一個基本函數現在需要引用一下，亦即：

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \cdots$$

因此，式(b)又可表爲：

$$\boxed{y = C^*\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\right)} \qquad \text{(c)}$$

由以上討論知，式(a)、式(b)與式(c)均表原微分方程式之通解。另需請讀者注意，一次微分的方程式解好後，會出現一個積分常數；若是解析 n 次微分(n 階)的微分方程式，則會出現 n 個積分常數。

解法❷：

本題因微分方程式的係數不完全是常數，故不適用提要 23~25 的解法。這裡擬直接引用冪級數法(*Power Series Method*)解析問題，茲令問題之冪級數解爲：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\right)}{dx} - 2x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\right) = 0$$

再作微分，則：

$$\left(0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\right) - \left(2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + 2a_4 x^5 + \cdots\right) = 0$$

再作同類項合併的動作：

$$a_1 + \left(2a_2 - 2a_0\right)x + \left(3a_3 - 2a_1\right)x^2 + \left(4a_4 - 2a_2\right)x^3 + \cdots = 0$$

比較係數知：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_2 - 2a_0 = 0 \\ 3a_3 - 2a_1 = 0 \\ 4a_4 - 2a_2 = 0 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

在整理係數間之關係時，是選取 a_0 爲獨立係數，爲什麼僅選取一個係數爲獨立係數？因爲原微分方程式是一階微分方程式，僅微分一次，若以積分方法求解，僅會出現一個積分常數，故只需在無限多個係數 $a_m\left(m = 0, 1, 2, 3, \cdots\right)$ 當中，選出一個係數爲獨立係數即可。爲方便起見，通常選取第一個係數 a_0 爲獨立係數，再找出其他係數與 a_0 的關係，如以下所示：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = a_0 \\ a_3 = \dfrac{2}{3}a_1 = 0 \\ a_4 = \dfrac{2}{4}a_2 = \dfrac{1}{2}a_0 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

基於此，再將各個係數與獨立係數 a_0 的關係代回冪級數解中，即可求出問題的通解：

$$y = a_0 + a_0 x^2 + \frac{1}{2!}a_0 x^4 + \cdots$$

再將係數 a_0 提出來，則問題之通解爲：

$$\boxed{y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots\right)}$$

以上所示之通解與式(c)完全相同。一般來說，只要寫出冪級數解之前三項即可，讀者若發現所表達出之冪級數解僅一、兩項，則需再重新計算一遍，請至少能寫出前三個級數項次來。

範例三
試解出 Bernoulli 微分方程式 $\frac{dy}{dx}=2x$ 之通解(*General Solution*)。

解法❶：

擬先以提要 9 的解法說明問題之通解，係採用解析一階 ODE 的第二的方法---變數可分離之 ODE 的解法。其解題精神之前已描述一遍，不再多言。

已知原一階微分方程式為：

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

上式已表為等號左邊僅應變數(*Dependent Variable*) y 有關，而等號右邊則僅與自變數(*Independent Variable*) x 有關。然後，再同時對自變數 x 作不定積分。因係對問題作不定積分，所以上式需加上積分常數 C：

$$\int \frac{dy}{dx}dx=2\int xdx+C$$

上式可再改寫為：

$$\int dy=2\int xdx+C$$

因此，上式等號左邊是對 y 作積分，而等號右邊是對 x 作積分。上式中之兩個積分式積分後，結果為：

$$\boxed{y=x^2+C} \qquad \text{(a)}$$

解法❷：

今擬直接引用冪級數法(*Power Series Method*)解析問題，茲令問題之冪級數

解爲：

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

將上式代回原微分方程式：

$$\frac{d\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots\right)}{dx} - 2x = 0$$

再作微分，則：

$$\left(0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\right) - 2x = 0$$

再作同類項合併的動作：

$$a_1 + \left(2a_2 - 2\right) x + 3a_3\, x^2 + 4a_4\, x^3 + \cdots = 0$$

比較係數知：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_2 - 2 = 0 \\ 3a_3 = 0 \\ 4a_4 = 0 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

在整理係數間之關係時，是選取 a_0 爲獨立係數，爲什麼僅選取一個係數爲獨立係數？因爲原微分方程式是一階微分方程式，僅微分一次，若以積分方法求解，僅會出現一個積分常數，故只需在無限多個係數 $a_m\left(m = 0, 1, 2, 3, \cdots\right)$ 當中，選出一個係數爲獨立係數即可。爲方便起見，通常選取第一個係數 a_0 爲獨立係數，再找出其他係數與 a_0 的關係，如以下所示：

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \\ \quad\vdots \end{cases}$$

基於此，再將各個係數與獨立係數 a_0 的關係代回冪級數解中，即可求出問題的通解：

$$\boxed{y = a_0 + x^2} \qquad \text{(b)}$$

以上所示之通解與式(a)完全相同，其中 a_0 相當於式(a)中之積分常數 C。