提要 103：認識幾何級數(*Geometric Series*)

幾何級數(***Geometric Series***)是 ***Maclaurin*** 級數的一種，幾何級數之型式為：

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}x^m \text{ ，} |x|<1} \quad (1)$$

此一級數於複變分析(***Complex Variable Analysis***)中，有非常重要的應用。因以數理方法解析工程問題時，常需針對分析範圍作封閉之環積分(*Closed-Contour Integration*)，且分析範圍內常有孔洞存在，例如土木工程上常見的箱涵、挖洞的樓板及牆壁、或混凝土灌漿時所出現的蜂窩等等。

而解決包含孔洞問題之環積分的最好方法，並不是硬碰硬的直接對積分變數作積分，而是需繞個彎引用殘值定理(或稱為留數定理，***Residue Theorem***)，求出 ***Laurent*** 級數中之某一特定項次的係數，再將該係數乘以 $2\pi i$ 即可。但是在解出 *Laurent* 級數中之某一特定項次的係數時，必需引用幾何級數的展開概念，處理待積分的函數，如此方才容易完成包含孔洞問題的環積分問題。

以下以一例說明幾何級數的應用。

範例一
試將 $\dfrac{1}{x-3}$ 進行幾何級數展開，並說明其收斂範圍。

解答：

這個問題有兩種幾何級數展開方式，分別說明如下。

(1) 第一種幾何級數展開方式

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x-3}&=\frac{1}{x}\frac{1}{1-\dfrac{3}{x}}\\
&=\frac{1}{x}\left\{1+\frac{3}{x}+\left(\frac{3}{x}\right)^2+\left(\frac{3}{x}\right)^3+\left(\frac{3}{x}\right)^4+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{27}{x^3}+\frac{81}{x^4}+\cdots\right\}\\
&=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{27}{x^4}+\frac{81}{x^5}+\cdots
\end{aligned}$$

其中$\left|\dfrac{3}{x}\right|<1$，即$|x|>3$。

(2) 第二種幾何級數展開方式

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x-3} &= -\frac{1}{3-x} \\
&= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}} \\
&= -\frac{1}{3}\left\{1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}\right)^4+\cdots\right\} \\
&= -\frac{1}{3}\left\{1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{81}+\cdots\right\} \\
&= -\frac{1}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^2}{27}-\frac{x^3}{81}-\cdots
\end{aligned}
$$

其中$\left|\frac{x}{3}\right|<1$，即$|x|<3$。

【註】這個題目有兩種結論。若採用$|x|>3$，則$\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\frac{27}{x^4}+\frac{81}{x^5}+\cdots$；然而，若考慮$|x|<3$，則$\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{3}-\frac{x}{9}-\frac{x^2}{27}-\frac{x^3}{81}-\cdots$。很有意思的題目，讀者應亦有同感。