提要 102：認識 *Maclaurin* 級數

已知冪級數(*Power Series*)係指：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \tag{1}$$

式(2)中**當冪級數之中心點(*Center*) $x_0 = 0$ 時，級數即稱之為 *Maclaurin* 級數。**

Notice:

常見的四種 *Maclaurin* 級數如以下所示，應記下來。

- $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}，x \in R。}$
- $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}，x \in R。}$
- $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}，x \in R。}$
- $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} x^m，|x| < 1。}$

此一級數稱為幾何級數(*Geometric Series*)。

範例一
試證指數函數 e^x 之 *Maclaurin* 級數為 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$，$x \in R$。

證明：

已知任意函數 $f(x)$ 之 *Maclaurin* 級數展開公式為

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{2}$$

其中 $f(x) = e^x$ 且 $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = e^x$，故

$f(0)=e^{0}=1$
$f'(0)=e^{0}=1$
$f''(0)=e^{0}=1$
$f'''(0)=e^{0}=1$
$\cdots$

所以式(2)可表為

$$f(x)=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}$$

故得證。

【註】

可再引用比值審斂法(Ratio Test) $R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|$ 決定問題之收斂半徑 R，如以下所示。因為 $a_m=\frac{1}{m!}$ ，$a_{m+1}=\frac{1}{(m+1)!}$ ，故收斂半徑 R 可表為：

$$\begin{aligned}R&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|\\&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{m!}}{\frac{1}{(m+1)!}}\right|\\&=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{m!}}{\frac{1}{(m+1)m!}}\right|\\&=\lim_{m\to\infty}|m+1|\\&\to\infty\end{aligned}$$

即收斂半徑 R 為無限大，因級數的中心點為座標原點所以 $x\in R$ ，故得證。