提要 101：認識何謂冪級數(*Power Series*)？

所謂**冪級數(*Power Series*)**係指：

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m \tag{1}$$

其展開則為：

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + a_5(x-x_0)^5 + \cdots \tag{2}$$

式(2)中之係數 a_0 、 a_1 、 a_2 、...等稱為冪級數之**係數(*Coefficient*)**； x_0 則稱為冪級數之**中心點(*Center*)**； $x-x_0$ 是冪級數之**冪次(*Power*)**。

Notice:

1. 冪級數中之所有的係數和變數可以是複數，但目前的討論僅考慮所有的係數和變數均為實數。

2. 若中心點 $x_0 = 0$ ，則此級數亦可稱之為 ***Maclaurin* 級數**，常見的四種 *Maclaurin* 級數如以下所示，應記下來。

- $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \text{ ， } x \in R \text{ 。}}$
- $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^5}{7!} \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \text{ ， } x \in R \text{ 。}}$
- $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \text{ ， } x \in R \text{ 。}}$
- $\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} x^m \text{ ， } |x| < 1 \text{ 。}}$

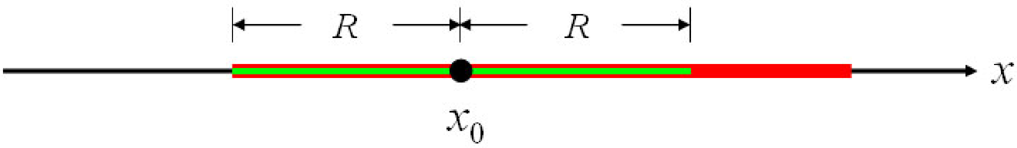
   此一級數稱為**幾何級數(*Geometric Series*)**。

3. 冪級數中之自變數 x 是不能隨便代入數值的，因有其收斂範圍，通常以 $|x-x_0| < R$ 加以表示，亦可表為 $-R < x - x_0 < R$ 或 $-R + x_0 < x < R + x_0$ 。例如，幾何級數 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$ 中之自變數 x 僅能代入 $-1 < x < 1$ 範圍內的數值，若是代入 2 就會造成錯誤，因為上式等號左邊會變為 $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-2} = -1$ ，這是一個有限

值；但是幾何級數等號右邊的 $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\cdots$ 就會變爲 $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots$，顯然其值爲 ∞。故將 2 代入幾何級數是不對的，因 2 並不在收斂範圍內。

4. 指數函數 e^x、正弦函數 $\sin x$ 和餘弦函數 $\cos x$ 之 ***Maclaurin* 級數**的收斂範圍是整個實數軸，亦即任意實數均可代入所展開的級數中。

5. 如何決定級數的收斂範圍是一件相當重要的事情，後續單元會加以介紹，今僅簡要說明之。收斂範圍牽涉到收斂半徑的決定，在下圖中，x_0 表級數展開時之中心點，紅色範圍表自變數 x 可以代入之點，但其收斂半徑 R 所含示之 x 所屬範圍並不一定是紅色範圍，而是綠色範圍，這是因爲收斂半徑的決定亦與中心點 x_0 的位置有關。由此可知，收斂半徑內所包括的點不見得與實際可代入的點完全相同。



6. 比值審斂法(Ratio Test)是決定收斂半徑 R 時，最常採用的方法。亦即：

$$\boxed{R=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{a_m}{a_{m+1}}\right|}$$

其中 a_m 爲冪級數 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$ 中之係數。這個方法較容易決定冪級數之收斂半徑。

7. 根值審斂法(Root Test)也是決定收斂半徑 R 的方法，其公式如以下所示：

$$\boxed{R=\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{|a_m|}}$$

其中 a_m 爲冪級數 $\sum_{m=0}^{\infty}a_m(x-x_0)^m$ 中之係數。但大部分的情況下，這個方法較不好用。