中原大學

土木工程系

94~97 學年度
工程數學考古題

中原大學 94 學年度碩士班入學考試

3 月 20 日 14:00~15:30

土木工程系結構組/大地組/水環組

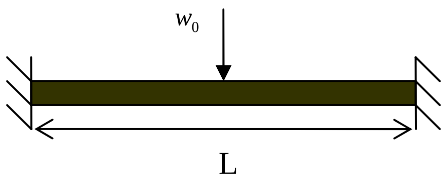
誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目： 工程數學 （共 1 頁第 1 頁）

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者 ■不可使用計算機

1. Solve $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$ (10%)

2. A uniform beam of length L carries a concentrated load w_0 at $x = L/2$. The beam is embedded at both ends. Use the **Laplace transform method** to solve the differential equation $EI\dfrac{d^4y}{dx^4} = w_0\delta(x - L/2)$, where $\delta(x - L/2)$ is a Dirac delta function, and $y(0)=0, y'(0)=0, y(L)=0, y'(L)=0$ (15%)



3. Expand $f(x) = x^3, 0 < x < 1$, in a Fourier Sine series. (10%)

4. (a) Describe the orthogonality of the Sturm-Liouville problems. (5%)

   (b) Solve $y''(x) + 9\lambda^2 y(x) = 0$

   $y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$ (10%)

5. Given $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{v}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, and $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{e}_3 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, where $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ are the unit vectors of the orthogonal curvilinear coordinate system.

   (1) judge whether $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ is a base or not? (10%)

   (2) if the answer of (1) is "yes", find the reciprocal base of $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$; if the answer of (1) is "no", explain why $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ cannot be a base. (10%)

6. Find the solution of the following integral $I = \int_c \operatorname{csch}^2 z\, dz$, where $c: |z| = 1$ (15%)

7. Solve $u_t = u_{xx} + F(x)$, with B.C. $u(0,t) = 0, u(L,t) = 0$, and $u(x,0) = f(x)$, where $F(x)$ and $f(x)$ are given functions. (15%)

中原大學 95 學年度碩士班入學考試

3 月 18 日 14:00~15:30 土木工程系(結構組/大地組/水環組)　　誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊, 堅守正直」的你！

科目：工程數學　　　　(共 1 頁第 1 頁)

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者　　■不可使用計算機

1. (a)試證明 Green's theorem in the plane $\iint\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy=\oint F_1dx+F_2dy$。(15分)

   (b) 假設區域R為片段圓滑的曲線C所包圍，試證明區域R之面積 $A=\frac{1}{2}\oint_c xdy-ydx$。(5分)

2. 試求 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=\ln x$ 之解。(15分)

3. 令$[A]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$試求對應的特徵值(eigenvalues)及特徵向量(eigenvectors)。(15分)

4. (a) 給定一存在於$-l<x<l$之正交函數集合S=$\{1,\cos\frac{m\pi}{l}x,\sin\frac{n\pi}{l}x\,|\,m,n$ 為正整數$\}$，試將此集合正規化(Normalization)。(9分)

   (b) 設 $f(x)$在$-l<x<l$領域中為一片段連續函數，表為

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad -l<x<l$$

   試求 a_0,a_n,b_n (9分)

5. 試利用冪級數解 Legendre 方程式

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+6y=0$$ (14分)

6. (a) 試將 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+2)}$ 以 $z_0=0$ 為中心，在$1<|z|<2$環內展開成Laurent級數。(9分)

   (b) 積分$\oint_c f(z)dz$，$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}$，式中C為$|z|=R$，$1<R<2$。(9分)

中原大學 96 學年度碩士班入學考試

96/03/25 14:00~15:30 土木工程學系

誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目： 工程數學 （結構組、大地組、水利組） （共 1 頁）

** 不可使用計算機

1. 解線性方程式 $y' + f(x)y = g(x)$ （15%）

2. 試用 *Laplace* 轉換求積分方程式：

$$y(t) = e^{-t} + \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$$

（15%）

3. 求 $z^2 - xy = 2$ 在 $(1,2,2)$ 點上之切平面及法線方程式 （15%）

4. 積分 $\oint_c (y + yz\cos xyz)dx + (x + xz\cos xyz)dy + (z + xy\cos xyz)dz$ ，

式中 c 為 $z = 0$ 平面上之橢圓 $4x^2 + 9y^2 = 36$ （15%）

5. 求 $f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \end{cases}$ 之 *Fourier* 級數 （20%）

6. 解方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad u(0,t) = u_x(l,t) = 0 \text{，} u(x,0) = f(x)$$

（20%）

中原大學 97 學年度碩士班入學考試

4 月 13 日 14:00~15:30　土木工程學系（結構組、大地組、水利組）

誠實是我們珍視的美德，我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目：工程數學　（共 1 頁第 1 頁）

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者　■不可使用計算機

1. 試求矩陣 $[A]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 的特徵值 (eigenvalue) 和特徵向量 (eigenvector)。 (15 分)

2. 試求 $\iint_S \left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\vec{n}\,dA$，其中 S 為單位立方體 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$，$0\le z\le 1$ 所對應的封閉表面。 (15 分)

3. 利用待定係數法求 $y''+2y'-3y=8e^x$ 之解。 (15 分)

4. 試求 $x^2y''-5xy'+8y=2\ln x$。 (15 分)

5. 試求 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}dx$ 的 Cauchy principal value。 (20 分)

6. 試求下面方程式之解 (20 分)

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\qquad 0<x<L,\quad t>0$$
$$u(0,t)=0,\qquad u(L,t)=0,\ t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\ 0\le x\le L$$

中原大學

機械工程系

94~97 學年度
工程數學考古題

中原大學 94 學年度碩士班入學考試

3 月 20 日 14:00~15:30 機械工程系熱流組

誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目：工程數學 （共 1 頁第 1 頁）

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者 X 不可使用計算機

1. Solve the following differential equations: 40%
   (a) $y'' + y = x$, $y'(0) = 1$, $y(\pi) = 0$
   (b) $(2+x)^2 y'' - 2y = x^2$
   (c) $yy'' = y'^2$
   (d) Use the method of Laplace Transform to resolve problem (a).

2. Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix A 15%

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

3. (a) If $\vec{V} = \nabla\phi$, where $\phi = xyz$, determine $\nabla \cdot \vec{V}$ and $\nabla \times \vec{V}$. 5%

   (b) Assume that f and g are scalar functions with continuous second partial derivatives in a space region T with boundary surface S. Show that

$$\iiint_T (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV = \iint_S f \frac{\partial g}{\partial n} dA$$ 10%

4. Heat is generated at a constant rate uniformly throughout a slab which is initially at the temperature $T(x)$ and whose faces $x = 0$ and $x = L$ are kept at temperature zero. Thus the 1-D heat conduction equation associated with conditions is

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + C \;;\; T(x,0) = T(x), T(0,t) = 0 \text{ and } T(L,t) = 0$$

where α and C are positive constant. Find the temperature at any point of the slab at any subsequent time $T(x,t)$. 30%

中原大學 95 學年度碩士班入學考試

3 月 18 日 11:00~12:30 機械工程系熱流組

誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目： 工程數學 **（共 1 頁第 1 頁）**

☑不可使用計算機

1. The lumped thermal capacity model is often applied for transient heat transfer system, which can be simply expressed as

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{m}(T - T_e) + q$$

where m is a time constant, q is a constant from heat source, and T_e is the temperature of free stream fluid. Determine the solution of <u>transient and steady temperature</u> if the initial temperature for the system is T_0. (15%)

2. Solve the following differential equations

a. $x\dfrac{dy}{dx} - ky = x^2$ (k = constant).

b. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$. (20%)

3. Show that the total derivative, local derivative, and convective derivative have the relation

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \bullet \nabla$$

where $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ and $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ is velocity. (15%)

4. (20%)

a. Reduce the third-order differential equation of

$$\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + y = 0$$

to be a system of <u>linear first-order</u> differential equations.

b. Apply <u>the method from eigenvectors and eigenvalues</u> to solve above system with initial conditions: $y(0) = 1$, $\dfrac{dy}{dt}(0) = 0$, and $\dfrac{d^2y}{dt^2}(0) = 3$.

(Note: If you use other methods to solve the third-order differential equation, you can <u>only obtain maximum score 10 %</u>.)

5. Two-dimensional ($0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$) steady heat conduction equation associated with conditions is

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0; T(x,0) = 0, T(x,b) = 1, T(0,y) = 0, \text{ and } T(a,y) = \sin(py/b)$$

Find the temperature distribution, $T(x,y)$. (30%)

中原大學 96 學年度碩士班入學考試

96/03/25 11:00~12:30 機械工程學系熱流系統組　　誠實是我們珍視的美德，
我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目：工程數學　　（共 1 頁第 1 頁）

□可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者　　V 不可使用計算機

1. Find a fundamental matrix and use it to write the complete solution of the system

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 3x_1 - 2x_2 + 4e^{2t} \end{aligned}$$

10%

2. Solve the following differential equations
   (a) $2xyy' - y^2 = x^2$; $y(1) = 1$
   (b) $y'' + 2y' - 3y = 4e^{2x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -6/5$
   (c) $y'' + 3y^2 y' = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$ 　30%

3. Consider the velocity field of a frictionless flow $\vec{V} = xy^2\hat{i} - \frac{1}{3}y^3\hat{j} + x^2y\hat{k}$.

   Determine
   (a) if it is a possible incompressible flow,
   (b) if it is a possible irrotational flow,
   (c) if the flow is incompressible, find the pressure gradient ∇p with negligible body force for density unity ($\rho = 1$). The Euler's equation is

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\right) = -\nabla p + \rho\vec{g} .$$

30%

4. A one-dimensional slab ($0 \le x \le \pi$) is initially at temperature zero and the face $x = 0$ is kept at that temperature while the face $x = \pi$ is kept at a constant temperature T_0. Determine the temperature $T(x,t)$. Thus this 1-D heat conduction equation associated with conditions is

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \;;\; T(x,0) = 0 ,\, T(0,t) = 0 \text{ and } T(\pi,t) = T_0$$

where α is a positive constant.. 　30%

中原大學 97 學年度碩士班入學考試

4 月 13 日 11:00~12:30 機械工程學系熱流系統組　　誠實是我們珍視的美德，我們喜愛「拒絕作弊，堅守正直」的你！

科目：工程數學　　（共 1 頁第 1 頁）

☑可使用計算機，惟僅限不具可程式及多重記憶者　　☐不可使用計算機

1. 20 分

(a) 請求解　$x\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$; $y(1) = 2$ (10 分)

(b) 若(a)之題以數值方法求解，請簡述所用的方法及其求解步驟之推演。(10 分)

2. 15 分

請求解　$y\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

3. 15 分

請求解　$5y'' + y' = -6x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -10$

4. 15 分

請求解 $F(x,y,z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ 於位置點 $(1,-1,2)$ 在方向 $6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ 的變化量

(Directional derivative).

5. 15 分

請求解下列矩陣之 Eigenvalues 及其對應之 Eigenvectors.

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

6. 20 分

有一顆直徑為 10 cm 的鋼珠，其材質密度、比熱、熱傳導值分別為 $\rho = 8000\dfrac{kg}{m^3}$ 、

$C_P = 460\dfrac{J}{kg \cdot {}^oC}$ 、 $k = 35\dfrac{W}{m \cdot {}^oC}$ 。 開始時鋼珠保持著的 500^oC 均勻溫度分布。

在一瞬間把該鋼珠置放在一個溫度維持在的 80^oC 可控制環境中。在這狀況下假

設熱對流係數 $h = 15\dfrac{W}{m^2 \cdot {}^oC}$ 。

(a) 請以能量守恆觀念建立鋼珠的溫度隨時間變化方程式。

(b) 依據 (a) ，試估算該鋼珠的溫度下降至 100^oC 所需的時間。