屏東科技大學

土木工程系碩士班

92~97 學年度
工程數學考古題

1. **解一階微分方程式** $\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{2}Q=6$ ， $Q(0)=0$ 。(10%)

2. **高斯消去法**(Gauss elimination)**普遍用於線性方程式系統**(linear systems of equations)**與行列式值求解。試求行列式** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **之值**。(10%)

3. **試求矩陣** $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **之特徵值**(eigenvalues)**與特徵向量**(eigenvectors)。(10%)

4. **一固定直角座標系統** $(x \quad y \quad z)$ **上有四個點** $P_0(0 \quad 0 \quad 0)$， $P_1(1 \quad 1 \quad 0)$， $P_2(0 \quad 1 \quad 1)$， $P_3(1 \quad 0 \quad 1)$，**將任意兩點以一直線線段相連，可組成一個四面體，試求此四面體的體積(提示：角錐為角柱體積的** $1/3$)。(10%)

5. **解二階微分方程式** $m\frac{d^2y}{dt^2}+k\,y=\cos w\,t\ \left(w\neq\sqrt{k/m}\right)$**之通解**(general solution)，**其中** m，k **與** w **為固定之常數**。(20%)

6. **解二階微分方程式** $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=r(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}=1-u(t-1)$，**起始條件為** $y(0)=0$ **和** $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$，**其中** $u(t)$ **為單位步階函數**(unit step function)。(20%)

7. **一函數** $f(x)$ **稱之為週期性函數，若它是定義於所有實數** x，**而且對於所有** x，**若有某正數** p **使得** $f(x)=f(x+p)$；$f(x)$ **之週期**(period)**為最小值之** p。**週期性函數可展開成** Fourier **級數** $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{np}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{np}{L}x\right)\right]$， $-L<x<L$，**函數的週期** $p=2L$。**試求函數** $f(x)=\cos 3x\ \sin 7x$ **的週期，併將函數** $f(x)$ **表示成** Fourier **級數的型式**。(20%)

國立屏東科技大學 九十三 學年度 碩士班暨碩士在職專班 招生考試
土木工程系碩士班
專業科目（一）工程數學 試題

1. The equation is given as

$$2 \sin y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

(1) Find the integrating factor of the equation. (8%)

(2) Find the general solution of the equation. (7%)

2. $y'' - y = 3e^{2x}$ Find the general solution of the equation. (15%)

3. Obtain the particular solutions of the following problem. (15%)

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 4 \quad ; \quad y(1) = y'(1) = 0$$

4. Use the Laplace transform to find the solution. (15%)

$$y'' + 4y' + 3y = \delta(t-2) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0 \qquad (\text{Note} : L[\delta(t-a)] = e^{-as})$$

5. For the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ , } u(x,0) = 1.$$

Find the solution. (20%)

6. For the matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A. (20%)

國立屏東科技大學　九十四　學年度　碩士班暨碩士在職專班招生考試

工程數學 試題

壹、一 6N(牛頓)力其作用方向由 C 點指向 B 點(如圖一所示)，請計算

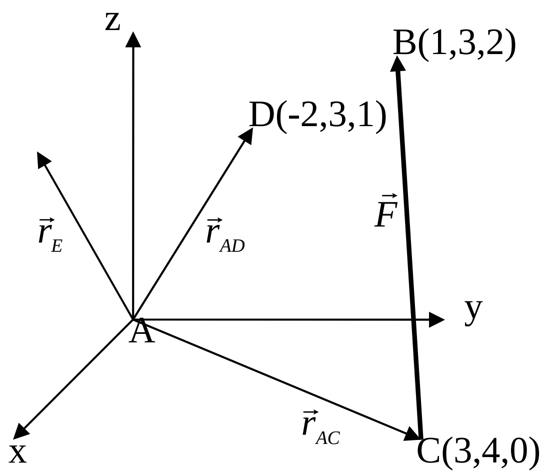
(一). 此力量之直角座標系向量表示式，$\vec{F}=?$ (5%)

(二). $\vec{r}_{AC}\cdot\vec{r}_{AD}=?$ (5%)

(三). 此力量對支撐點 A 產生的力矩，即計算 $\vec{M}_A=\vec{r}_{AC}\times\vec{F}$ (5%)

(四). $\vec{r}_{AD}$ 的單位向量，$\vec{u}_{AD}=?$ (5%)

(五). $\vec{r}_E=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$，若 $\vec{r}_{AC}+\alpha\,\vec{r}_E$ 與 $\vec{r}_{AD}$ 垂直，則 $\alpha=?$ (5%)



圖一 (長度單位=m)

貳、常微分方程組：$\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & -4\end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，請計算

(一). **A** 矩陣的特徵值與特徵向量 (10%)

(二). **A** 矩陣的反矩陣，$\mathbf{A}^{-1}=?$ (5%)

(三). x_1 與 x_2=? (10%)

叁、二階常微分方程式：$y''+4y=f(t),\ y(0)=y'(0)=0$

(一). 若 $f(t)=4$，則 $y(t)=?$ (10%)

(二). 以上題得到之 $y(t)$，求對 $t=0$ 的泰勒級數展開 (5%)

(三). 若 $f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t<3\\ t, & t\ge 3\end{cases}$，則 $y(t)=?$ (15%)

肆、一階偏微分方程式：$\dfrac{\partial u}{\partial y}=x\cos y$

(一). 若 $u(x,0)=x$，則 $u(x,y)=?$ (5%)

(二). 以上題得到之 $u(x,y)$，求 $\nabla^2 u=?$ ($\nabla=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$) (5%)

(三). 若已知 $0<x<2$，求 $u(x,0)$ 之傅立葉半幅正弦展開式 (10%)

國立屏東科技大學　九十四 學年度　碩士班甄試招生考試

微分方程與向量分析　試題

(壹).二維流體之速度場: $\vec{V}=(3x^2+y)\vec{i}-(6xy+x)\vec{j}$ ，

(1).計算 $\nabla\cdot\vec{V}=?$ (5%)

(2).計算 $\nabla\times\vec{V}=?$ (5%)

(3).計算 $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial y}=?$ (5%)

(4).計算以 $x=\pm1, y=\pm1$ 所圍成正方形的環流量,即求 $\iint_A(\nabla\times\vec{V})\cdot d\vec{A}=?$ (10%)

註：本題中 ∇ 為梯度向量($=\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ 且 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分別為直角座標系之單位向量)。

(貳).線性方程組: $\begin{array}{r} x+y-2z=2 \\ -x+2y+z=0 \\ y-z=1 \end{array}$ ，寫成矩陣的形式表示為: $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ ，

(1).計算 $\mathbf{A}$ 矩陣的反矩陣(inverse matrix)，即 $\mathbf{A}^{-1}=?$ (5%)

(2).計算此線性方程組的解， $\mathbf{X}=?$ (5%)

(3).計算 $\mathbf{A}$ 矩陣的特徵值(eigenvalues) (10%)

(4).計算 $\mathbf{A}$ 矩陣的特徵向量(eigenvectors) (10%)

(叁).二階常微分方程式: $y''+ay'+by=c$ ，

(1).若已知 e^x 與 e^{2x} 為滿足 $y''+ay'+by=0$ 的兩個解，計算 $a=?$ ， $b=?$ (5%)

(2).若 $a=-6, b=9, c=e^{3x}$ ，求此二階常微分方程式的通解(general solution)。 (10%)

(3).若 $a=-\dfrac{2}{x}, b=\dfrac{2}{x^2}, c=x$ ，求此二階常微分方程式的通解(general solution)。 (10%)

(肆).一維熱傳導方程式: $\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial T^2(x,t)}{\partial x^2}$, $0<x<\pi, t>0$ ，

(1).若 $T(0,t)=T(\pi,t)=0, T(x,0)=f(x)$ ，則 $T(x,t)=?$ (10%)

(2).若 $T(0,t)=0, T(\pi,t)=T_0, T(x,0)=f(x)$ ，則 $T(x,t)=?$ (10%)

國立屏東科技大學　九十五　學年度　碩士班暨碩士在職專班招生考試

工程數學

1. The homogenous O.D.E. with constant coefficients is
   $y^{(4)} - 3y''' + 4y' = 0.$
   Find the general solution. (20%)

2. Solve the initial problem.　(20%)
   $x^2y'' + 2xy' - 6y = 30$　；　$y(1) = y'(1) = 0$

3. For the matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   (1) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A. (10%)
   (2) Find two nonsingular matrices P and Q such that PAQ is a diagonal matrix. (10%)

4. (1) Please prove the $L[f'(t)] = sF(s) - f(0)$　(10%)

   (2) Find the $L[e^{-3t}\int_0^t \cosh 2x dx]$　(10%)　(Note: L[ ] Laplace transform symbol)

5. For the partial differential equation
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = (1 - \cos 2x)/2.$
   Find the solution. (20%)

一、　試求下列各常微分方程式之通解。(每題各 10 分，共 40 分)

1. $2\sin(y^2)dx + xy\cos(y^2)dy = 0$

2. $y'' - 4y' + 3y = 10e^{-2x}$

3. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln(x), \qquad (x > 0)$

4. $y' - Ay = -By^2$, (A,B 均爲常數且 A > 0, B > 0)

二、　試利用 Laplace 轉換求下列初始値問題之解：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{cases}$$

初始條件：

$$y_1(t=0) = 1,\ y_1'(t=0) = \sqrt{3k},\ y_2(t=0) = 1,\ y_2'(t=0) = -\sqrt{3k}$$

其中 k 爲常數且 $k > 0$。(15 分)

三、　試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ 之特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors)。 (15 分)

四、　試利用高斯散度定理(Divergence theorem of Gauss) 求下列面積分：

$$\iint_S (x^3 z\,dydz + x^2 yz\,dzdx + x^2 z^2\,dxdy)$$

其中 S 表示圓柱面 $x^2 + y^2 = 4$ 與 $z = 0,\ z = 5$ 所形成之封閉表面。(15 分)

五、　試以冪級數(Power series) 求解 $(x-3)y' - xy = 0$。(15 分)

1. The vector $\mathbf{F} = 8xz\,\mathbf{i} - y^2\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$, and $\mathbf{n}$ is the outward drawn unit normal vector, please evaluate $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, where S is the surface of the cube bounded by x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1. (20%)

2. $y'' + 4y' + 3y = \sin x$. Find the general solution of the equation. (15%)

3. Using the Laplace Transform to solve the initial value problem

   $y'' - 3y' + 2y = e^t \qquad y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1$. (15%)

4. Solve the O.D.E. $(x^2 + 3y)dx + (3x + 2y - 5)dy = 0$. (15%)

5. Determine the Fourier expansion of the following function:

   $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \qquad -\pi < x < \pi$ and show that

   $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{1}{36} + \cdots\cdots = \frac{\pi^2}{12}$ (20%)

6. Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, if there exists a linear system $\mathbf{AQ} = \mathbf{T}$, find the matrix $\mathbf{Q}$. (15%)

國立屏東科技大學　九十六　學年度　碩士班 甄試招生考試
土木工程系 微分方程與向量分析 試題

(一) 試求下列具初始條件之常微分方程式的解：(20%)

$$\ddot{y}+2p\dot{y}+p^2y=e^{-pt}\ ,$$

其中 p 為實係數。初始條件： $y(0)=1$ ， $\dot{y}(0)=0$ 。

(二) 若 $e^t\sin(4t)$ 為常微分方程式 $\ddot{y}+p\dot{y}+qy=0$ 之一解，則實係數 p 與 q 之值應各為多少。(15%)

(三) 試利用拉普拉斯轉換(Laplace transformation)，並採用 $p(t)=\delta(t-1)$，即迪拉克函數(Dirac delta function)，或亦稱為單衝函數(unit impulse function)，求下列初始值問題之解：(25%)

$$\ddot{y}+2\xi\omega\dot{y}+\omega^2y=p(t)\ ,$$

其中 ω 與 ξ 均為常數，且 $0<\xi<1$。初始條件： $y(0)=0$ ， $\dot{y}(0)=0$ 。

(四) 試用格林定理(Green's theorem)，依逆時針方向繞著 R 的邊界 C，計算線積分

$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r}$ ，其中：

$\boldsymbol{r}$ 為邊界 C 的向量函數；

函數 $\boldsymbol{F}=[\frac{\boldsymbol{e^y}}{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{e^y}\ln\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}]$ ；

xy 平面上封閉有界限的區域 $\boldsymbol{R}:1+\boldsymbol{x}^4\le\boldsymbol{y}\le 2$ 。(15%)

(五) 一組無阻尼(damping)之質塊-彈簧系統，其數學模型可寫為

$$\{\ddot{\boldsymbol{y}}\}=\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}}_2\\ \ddot{\boldsymbol{y}}_1\end{Bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{y}\}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{y}_2\\ \boldsymbol{y}_1\end{Bmatrix}\ ,$$

若已知 $\{\boldsymbol{x}\}$ 為 $[\boldsymbol{A}]$ 之一個特徵向量，則其對應之一個解可寫成 $\{\boldsymbol{y}\}=\{\boldsymbol{x}\}\boldsymbol{e}^{\omega t}$ ，其中 t 代表時間：

(1) 請找出此系統之所有的 ω 值與對應之特徵向量 $\{\boldsymbol{x}\}$ 。(20%)

(2) 試寫出此系統之通解(general solution)。(5%)

1. 已知四點 **P** (2, 1, -1)、**Q** (3, 0, 2)、**R** (4, -2, 1)、**S** (5, -3, 0)，求以 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$ 及 $\overline{PS}$ 為三鄰邊之平行六面體之體積。(10%)

2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & -5 \end{vmatrix}$，試證明 $\det(\boldsymbol{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathbf{T}})$. (10%)

3. $(y^2+1)\,dx+(2xy+4)\,dy=0$. Find the general solution of the equation. (10%)

4. 試求下列函數之拉普拉斯轉換：(10%)

（a）$f(t) = (3+2t)^2$

（b）$f(t) = e^{3t}(\cos 2t+\sin 2t)$

5. 試求下述問題：(15%，每小題各為 5%)

（a）若 $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i}+xyz\,\mathbf{j}-y^2\,\mathbf{k}$，求 curl **F**.

（b）若 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = x^2y\,\mathbf{i}-2xz\,\mathbf{j}+2yz\,\mathbf{k}$，求 $\nabla\times(\nabla\times F)$.

（c）若 $\mathbf{F}(x,y,z) = xe^y\,\mathbf{i}+e^{xy}\,\mathbf{j}+\sin(yz)\,\mathbf{k}$，求 div **F**.

6. 試解下列之積分方程式：(15%)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y(v)}{(t-v)^2+4}dv = \frac{1}{t^2+9}$$

7. 解下列初期值問題：(15%)

$$\begin{cases} x'_1=3x_1+4x_2 \\ x'_2=3x_1+2x_2 \\ x_1(0)=6，x_2(0)=1； \end{cases}$$

8. 將函數

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0\le x<1, \\ 0, & 1<x\le 2, \end{cases}$$

展開成傅立葉級數. (15%)

一、常微分方程式：$ay''+by'+cy=d$ ，請依下列給定條件求解(每題十分)。

(1). $a=0$, $b=1$, $c=-1$, $d=e^{x}$.

(2). $a=1$, $b=-3$, $c=2$, $d=e^{2x}$.

(3). $a=x^2$, $b=-2x$, $c=2$, $d=x^3$.

(4). $a=1$, $b=0$, $c=1$, $d=\delta(t-2\pi)$, $y(0)=1, y'(0)=0$. $\delta(t)$ 為 Dirac Delta function.

二、$\phi(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $\vec{A}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{B}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ ，請依下列給定條件求解(每題五分)。

(1). $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 。 (2). $\vec{A}\times\vec{B}$ 。 (3). $\vec{A}$與$\vec{B}$的夾角。

(4). $\int\nabla\phi\cdot d\vec{r}$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $0\le x,y,z\le 1$ 。

三、$x_1'+3x_1-2x_2=0$, $x_2'+10x_1-6x_2=1$，表示為 $\mathbf{X}'=\mathbf{AX}+\mathbf{B}$ ，請求解下列問題：

(1). 寫出 $\mathbf{A}$ 與 $\mathbf{B}$ 的矩陣元素。 (五分) (2). $\mathbf{AB}=?$ (五分)

(3). $\mathbf{A}$ 的特徵值與對應的特徵向量。(十分) (4). $\mathbf{A}^{-1}=?$ (五分)

(5). $\mathbf{B}^{T}\mathbf{A}=?$ (五分) (6). $\mathbf{X}=?$ (十分)

屏東科技大學

機械工程系碩士班

92~97 學年度
工程數學考古題

1. 解一階微分方程式 $\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{2}Q=6$ ， $Q(0)=0$ 。(10%)
2. 高斯消去法(Gauss elimination)普遍用於線性方程式系統(linear systems of equations)與行列式值求解。試求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 之值。(10%)
3. 試求矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 之特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors)。(10%)
4. 一固定直角座標系統 $(x \quad y \quad z)$ 上有四個點 $P_0(0 \quad 0 \quad 0)$，$P_1(1 \quad 1 \quad 0)$，$P_2(0 \quad 1 \quad 1)$，$P_3(1 \quad 0 \quad 1)$，將任意兩點以一直線線段相連，可組成一個四面體，試求此四面體的體積(提示：角錐為角柱體積的 $1/3$)。(10%)
5. 解二階微分方程式 $m\frac{d^2y}{dt^2}+k\,y=\cos w\,t\ \left(w\neq\sqrt{k/m}\right)$ 之通解(general solution)，其中 m，k 與 w 為固定之常數。(20%)
6. 解二階微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=r(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t\leq 1 \\ 0 & t>1 \end{cases}=1-u(t-1)$，起始條件為 $y(0)=0$ 和 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$，其中 $u(t)$ 為單位步階函數(unit step function)。(20%)
7. 一函數 $f(x)$ 稱之為週期性函數，若它是定義於所有實數 x，而且對於所有 x，若有某正數 p 使得 $f(x)=f(x+p)$；$f(x)$ 之週期(period)為最小值之 p。週期性函數可展開成 Fourier 級數 $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{np}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{np}{L}x\right)\right]$，$-L<x<L$，函數的週期 $p=2L$。試求函數 $f(x)=\cos 3x\ \sin 7x$ 的週期，併將函數 $f(x)$ 表示成 Fourier 級數的型式。(20%)

國立屏東科技大學 九十三 學年度 碩士班暨碩士在職專班 招生考試
機械工程系碩士班 甲組
專業科目（一）工程數學 試題

1. The equation is given as

$$2 \sin y \, dx + \cos y \, dy = 0$$

(1) Find the integrating factor of the equation. (8%)

(2) Find the general solution of the equation. (7%)

2. $y'' - y = 3e^{2x}$ Find the general solution of the equation. (15%)

3. Obtain the particular solutions of the following problem. (15%)

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4 \quad ; \quad y(1) = y'(1) = 0$$

4. Use the Laplace transform to find the solution. (15%)

$$y'' + 4y' + 3y = \delta(t-2) \quad ; \quad y(0) = y'(0) = 0 \qquad (\text{Note} : L[\delta(t-a)] = e^{-as})$$

5. For the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; u(0,t) = u(2,t) = 0 \text{ , } u(x,0) = 1.$$

Find the solution. (20%)

6. For the matrix A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A. (20%)

國立屏東科技大學　九十四　學年度　碩士班暨碩士在職專班招生考試
數學(ODE+線性代數) 試題

1. 請求解下列全微分方程式。　(15%)

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$$

2. 請求解下列全微分方程式。　(15%)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$$

3. 請求解下列全微分方程式。　(15%)

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0 \qquad \left(\text{Note}:\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2};\ y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

4. 請求解下列全微分方程式。　(15%)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x$$

5. 已知 $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，請求解 (1) $[A]$之特徵值(eigenvalues)，(2) $[A]$之特徵向量(eigenvectors)，(3) 使$[A]$對角化之矩陣$[P]$($[P]$為 Vandermonde matrix)，(4) 反矩陣$[P]^{-1}$，(5) $[P]^{-1}[A][P]$。　(25%)

6. 已知，$\begin{matrix} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{matrix}$，請以 Cramer’s Rule 求解$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$。　(15%)

國立屏東科技大學　九十五　學年度　碩士班暨碩士在職專班招生考試

數學（ODE+線代）

【第 1 至 第 6 題每題 15 分，第 7 題 10 分】

1. 試解一階常微分方程式。 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=3x \qquad y(1)=1$

2. 試解二階常微分方程式。 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+y=2\exp(-x)$ ； $y(0)=0 \qquad y'(0)=0$

3. 試解二階常微分方程式。 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=6\cos(x)$ ； $y(0)=2 \qquad y'(0)=2$

4. 試解二階常微分方程式。 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4\dfrac{dy}{dt}=f(t)$ ； $y(0)=0 \qquad y'(0)=0$

   其中 $f(t)=\begin{cases}1 & if \quad 1\le t\le 2\\ 0 & if \quad t<1 \quad and \quad t>2\end{cases}$

5. 兩向量 $\mathbf{A}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{B}=2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$。 試求 (a)兩向量純量積 $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$

   (b) 兩向量向量積 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ (c) 兩向量中間夾角 θ

6. 試解線性方程組。

$$\begin{aligned} x_1+x_4&=1\\ x_2+x_3&=3\\ x_1+x_4+x_5&=0\\ 2x_2-x_3&=3\\ x_1+2x_4&=2 \end{aligned}$$

7. 試求矩陣 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ 的特徵值(characteristic values)與特徵向量(characteristic vectors)

1. 試解初值問題 $\frac{dy}{dx} = y\cos(x)$， y(0)=2。(10%)

2. 試解初值問題 $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ ， y(0)=0。(10%)

3. 試解微分方程式之通解 $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$ 。(10%)

4. 試解微分方程式之通解 $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(x)$ 。(10%)

5. 試解初值問題 $\frac{d^2y}{dt^2} + y = f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$ ， $y(0) = y'(0) = 0$ 。(10%)

6. 在直角座標系統上的三個點: P(1,1,1) , Q(1,1,0) 和 R(1,0,1) , 試求垂直於 平面 PQR 的方向向量。(10%)

7. 在直角座標系統上的四個點: P(1,1,1) , Q(1,1,0) , R(1,0,1) 和 S(0,1,1) , 試求通過點 S 且垂直於 平面 PQR 的線與 平面 PQR 的交點之座標。(10%)

矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

8. 試求行列式值 $\det A$ 。(10%)

9. 試求矩陣 A 的反矩陣 A^{-1} 。(10%)

10. 試求線性系統 $AX = B$ 的解 X 。(10%)

1. 求解起始值問題 $\frac{dy}{dx}=2ye^{-2x}$; $y(0)=1$. (10%)

2. 求解起始值問題 $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+6y+5}{4y^2}$; $y(0)=0$. (10%)

3. 求解起始值問題 $\frac{dy}{dx}=2y+e^{2x}$; $y(0)=1$. (10%)

4. 求解起始值問題 $\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}+6y=e^x$; $y(0)=0$, $\frac{dy(0)}{dx}=0$. (10%)

5. 求解起始值問題 $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=4x$; $y(0)=0$, $\frac{dy(0)}{dx}=1$. (10%)

6. 求解起始值問題 $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=6\cos(3x)$; $y(0)=0$, $\frac{dy(0)}{dx}=3$. (10%)

向量 $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{B}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

$\mathbf{i}, \mathbf{j}$和$\mathbf{k}$為右手直角座標系三方向的單位向量.

矩陣 $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\5&2&0&0\\0&6&3&0\\0&0&3&4\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}$.

7. 求兩向量的純量積 $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$ 與 向量積 $\mathbf{A}\times(2\mathbf{B})$.(10%)

8. 求兩矩陣的乘積 $\mathbf{CD}$. (10%)

9. 求矩陣 $\mathbf{C}$ 的反矩陣 $\mathbf{C}^{-1}$. (10%)

10. $\mathbf{DX}=\mathbf{E}$；求未知矩陣 $\mathbf{X}$ 的值. (10%)