

範例一

Find the general solution,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x^2, \quad y(1) = 5.$$

【2018 警大研究所】

【解答】

原式乘以 $F(x)$ ，可得

$$F \frac{dy}{dx} + F \frac{y}{x} = 3x^2 F \quad (1)$$

再令

$$\boxed{\frac{F}{x} = \frac{dF}{dx}} \quad (2)$$

故式(2)可改寫為：

$$F \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx} y = 3x^2 F \quad (3)$$

式(3)等號左邊可合併為一個項次的微分：

$$\frac{d(Fy)}{dx} = 3x^2 F$$

上式再對自變數 x 作積分：

$$\int \frac{d(Fy)}{dx} dx = \int 3x^2 F dx + C$$
$$\Rightarrow Fy = \int 3x^2 F dx + C$$

故通解可表為：

$$y = \frac{1}{F} \left(\int 3x^2 F dx + C \right) \quad (4)$$

只要再求出 $F(x)$ ，通解即可完全推導出來。將式(2)整理成自變數 x 放在等號右邊，應變數 F 放在等號的左邊，然後再對自變數 x 作積分，則：

$$\int \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} dx = \int \frac{1}{x} dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{F} dF = \int \frac{1}{x} dx \quad (5)$$

上式加積分常數亦可，但並不影響最後的通解，因此求 $F(x)$ 的過程，通常不會加積分常數。所以式(5)積分後可得

$$\ln F = \ln x$$

因此

$$F(x) = x$$

將 $F(x)$ 代回式(4)，則

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \left(\int 3x^2 x dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{3}{4} x^4 + C \right) \\ &= \frac{3}{4} x^3 + \frac{C}{x} \end{aligned}$$

所以問題之通解為：

$$y = \frac{3}{4} x^3 + \frac{C}{x}$$

代入初始條件 $y(1) = 5$ ：

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{3}{4}(1)^3 + \frac{C}{1} \\ \Rightarrow C &= \frac{17}{4} \end{aligned}$$

故問題之特解為：

$$y = \frac{3}{4} x^3 + \frac{17}{4} \frac{1}{x}$$

參考文獻

1. 呂志宗，「【2018 教育部教學實踐研究計畫】(4K) 2018 警大：Solve $y' + y/x = 3x^2, y(1) = 5$ 」，<https://youtu.be/kmE5oAXcBi8>，2019。
2. 呂志宗，「【教學講義】提要 14：解一階 ODE 的第七個方法—兩項合併為一項的方法」，<http://t.cn/EiDRIjd>，2011。
3. 呂志宗，「【教學影片修訂】提要 013a：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/zh1exECKCko>，2011。
4. 呂志宗，「【教學影片修訂】提要 013bc：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/LIw5TSwK6n8>，2011。
5. 呂志宗，「【教學影片】提要 013b：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/oXif3lpCRwY>，2011。
6. 呂志宗，「【教學影片】提要 013c：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式



- 的解法」, <https://youtu.be/Mw6QKsnhKWe>, 2011。
7. 呂志宗,「【教學影片】提要 013a:解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法(加字幕)」, <https://youtu.be/ZUnz-r0RD34>, 2011。
 8. 呂志宗,「【教學影片】提要 013b:解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法(加字幕)」, <https://youtu.be/MXhdYDQ40xo>, 2011。
 9. 呂志宗,「【教學影片】提要 013c:解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法(加字幕)」, <https://youtu.be/pOr0V11a7FE>, 2011。

編著：中華大學土木工程學系呂志宗教授 cclu@chu.edu.tw

**致謝：本單元承蒙教育部教學實踐研究計畫案 107-Z27-MO-002-01 之經費補助，
特此申謝！**