提要 67：特徵向量的解法(二)--特徵根有重根

在之前相異特徵根的討論中，都是一個特徵根(*Eigenvalue*)對應一組與特徵向量(*Eigenvector*)相關之代數方程式，並可由該組代數方程式，解析出所對應之特徵向量。但是在某些情況下，當特徵根出現重根時，會出現必須由一組方程式決定兩組以上之特徵向量。其實讀者只要知道一個秘訣，就可以解決這一個困擾。

爲完整起見，仍將解析過程完整說明如下。很多時候，題目只會給一個 $\boldsymbol{A}$ 矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

然後要求找出其所對應之特徵根及特徵向量。由之前的說明得知，式(1)所示之 $\boldsymbol{A}$ 矩陣，實際上是聯立微分方程式之係數矩陣。在振動問題中，解特徵根相當於在找結構體之振動頻率，解特徵向量則相當於在找結構體中各質點之位移量的比例變化關係。

其特徵根 λ 之推求需解析以下所示之一元 n 次的特徵方程式(*Characteristic Equation*)：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)=0 \tag{2}$$

或

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0 \tag{2'}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2''}$$

而其特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 之推求則需解析另一組代數方程式：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=0 \tag{3}$$

或

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3'}$$

若讀者已熟悉聯立微分方程式之解析過程，就會曉得爲什麼要由式(2)解特徵根λ，以及爲什麼要由式(3)解特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 了。考慮重複特徵根之情況時，只要保留原來之代數方程式，即可找出所對應之特徵向量了，茲以一例說明特徵根及特徵向量之解析方式。

範例一

試解出矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 之特徵根及特徵向量。

【解答】

• 特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元三次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda)=0$$

亦即：

$$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$$

故問題之三個特徵根爲：

$$\lambda=2 \text{ 、 } \lambda=2 \text{ 、 } \lambda=1$$

• 特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

①當 $\lambda = 2$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -2X_1 - 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = -X_1$$

故特徵向量可表爲：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ -X_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + X_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式中包含兩組特徵向量，即：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{與} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

這就是說可由一個特徵根找出兩組特徵向量。通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$s\begin{Bmatrix}1\\0\\-1\end{Bmatrix},\quad s\neq 0\ \text{與}\ t\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix},\quad t\neq 0$$

②當$\lambda=1$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix}0-1 & 0 & -2\\ 1 & 2-1 & 1\\ 1 & 0 & 3-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases}-X_1-2X_3=0\\ X_1+X_2+X_3=0\\ X_1+2X_3=0\end{cases}$$

由此可知：

$$X_3=-\frac{1}{2}X_1\text{、}X_2=-\frac{1}{2}X_1$$

故另一組特徵向量可表爲：

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\-0.5X_1\\-0.5X_1\end{Bmatrix}=X_1\begin{Bmatrix}1\\-0.5\\-0.5\end{Bmatrix}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0.5\\-0.5\end{Bmatrix}\ \text{或}\ \begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix}1\\-0.5\\-0.5\end{Bmatrix},\quad k\neq 0$$

習題

1. Given $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$, find the eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{A}$.【90 中央化工所 10%，91 成大機械所 20%，95 交大土木所 10%】

2. Find the eigenvalues of $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -2 & 3 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 8 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3\end{bmatrix}$.【90 中興機械所 15%】

3. Find (a) the characteristic equation, (b) the eigenvalues, (c) and the bases for the eigenspaces of the given matrix $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 2\\ 0 & -1 & -8\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.【91 淡江資訊所 20%】

4. Find all eigenvalues and a basis for the corresponding eigenspace of the matrix $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Use your answer to compute $\mathbf{A}^{100}\mathbf{B}$ where $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 8\end{bmatrix}^T$.【91 中正電機所 10%】

5. Matrix $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{bmatrix}$, find the eigenvalues and eigenvectors.【91 中央資訊所 10%】

6. 求矩陣 $\mathbf{A}$ 的固有值（eigen value）與特徵向量：$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -3 & -2\\ 8 & -5 & -4\\ -4 & 3 & 3\end{bmatrix}$。【90 海洋光電所 10%】

7. Find eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.【87 交大應化所 15%】

8. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$, (a) find eigenvalues and eigenvectors, (b) solve $\mathbf{Ax}=\alpha\mathbf{Ix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\end{bmatrix}^t$,

α may be real.【86 台大土木所 25%】

9. Let the eigenvalues of the following matrix be λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, find
   (a) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$
   (b) $\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4$
   (c) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\lambda_4$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$【89 台科電子所 10%】

10. Assume that $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.
   (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of **A**.
   (b) Could the matrix **A** be diagonalizable? Explain.【91 高科通訊所 20%】

11. Find the eigenvalues of the following matrix

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$【88 北科通訊所 15%】

12. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (a) find eigenvalues λ, (b) how many linearly independent eigenvectors.【88 成大航太所 8%】

13. $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$, where $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 12 & -11 & 12 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$.
   (a) Determine the *rank*(**A**).
   (b) Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix **A**.
   (c) Write the general solution of the system $\mathbf{X}'=\mathbf{A}\mathbf{X}$.【91 台師大機電所 12%】