提要 66：特徵向量的解法(一)--相異特徵根

很多出題目的老師不是給聯立之微分方程式，而只會給一個 $\boldsymbol{A}$ 矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

然後需要考生求出其所對應之特徵根(*Eigenvalue*)及特徵向量(*Eigenvector*)。由之前的說明得知，式(1)所示之 $\boldsymbol{A}$ 矩陣，實際上是聯立微分方程式之係數矩陣。在振動問題中，解特徵根相當於在找結構體之振動頻率，解特徵向量則相當於在找結構體中各質點之位移量的比例變化關係。

若 $\boldsymbol{A}$ 矩陣之特徵根每個都不一樣，則在求解特徵向量時較無困擾。其特徵根 λ 之推求需解析以下所示之一元 n 次的特徵方程式(*Characteristic Equation*)：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)=0 \tag{2}$$

或

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0 \tag{2'}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2''}$$

而其特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 之推求則需解析另一組方程式：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=0 \tag{3}$$

或

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3')$$

若讀者已熟悉聯立微分方程式之解析過程，就會曉得爲什麼要由式(2)解特徵根λ，以及爲什麼要由式(3)解特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 了。茲以一例說明特徵根及特徵向量之解析方式。

範例一
試解出矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ 之特徵根及特徵向量。

【解答】

• 特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(-3-\lambda)^2-1=0$$

亦即：

$$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+4)=0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda=-2\text{、}\lambda=-4$$

• 特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=0$$

或

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

①當$\lambda = -2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故第一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad \text{或} \quad \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

②當$\lambda = -4$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

習題

1. 已知矩陣$[A]$的特徵值爲 1 和 6，所對應的特徵向量分別爲$\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$和$\begin{Bmatrix}4\\1\end{Bmatrix}$，其反矩陣的平方可寫成$\left([A]^{-1}\right)^2=\dfrac{1}{Q}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，試問$a$、$b$、$c$、$d$和$Q$之值爲何？【91 中央土木所 8%】

2. 已知方陣$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0\\0.2&0.6&0.2\\0&0.2&0.8\end{bmatrix}$，
   (a) 寫出特徵方程式。(1%)
   (b) 求特徵值及特徵向量。(5%) 【95 台科營建所】

3. Consider matrix $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ and column vector $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.
   (a) Find $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$. (5%)
   (b) Find $\mathbf{y}=\mathbf{A}^3\mathbf{x}$. (5%)
   (c) Find $\det\left(\mathbf{A}^9\right)$. (5%)
   (d) Is matrix **A** an orthogonal matrix? Show why or why not. (5%)
   (e) Find a matrix **B** such that **x** is an eigenvector of **B**. (5%) 【95 台大土木所】

4. Find the eigenvectors and eigenvalues of $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}5&4\\1&2\end{bmatrix}$. 【91 成大醫工所 20%】

5. 某地層無地下水，土壤單位重量爲γ，若k表示側向土壓力係數，在地面下深度z處，假設土壤單元立方體所受之正向應力與剪應力表示如下：
$$\sigma_z=\gamma z\text{，}\sigma_x=\sigma_y=k\sigma_z\text{，}\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_{zy}=\tau_{yz}=\left(\frac{1-k}{2}\right)\sigma_z$$
   求$k=0.5$時，該土壤單元立方體所受之最大主應力，與$k=2.0$時，該土壤單元立方體所受之最大主應力。【90 台科營建所 20%】

6. 已知矩陣 **A** 之部份元素的值及其二個特徵向量$\bar{e}_1$及$\bar{e}_2$：
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7.3&0.2&a\\-11.5&1.0&b\\17.7&1.8&c\end{bmatrix}\text{，}\bar{e}_1=\{-1,3,-1\}\text{，}\bar{e}_2=\{1,-1,3\}$$
   (a) 請求出矩陣 **A** 中待定常數a、b、c。
   (b) 請求出特徵向量所對應之特徵值λ_1及λ_2。
   (c) 求出第三個特徵值λ_3及特徵向量$\bar{e}_3$。 【89 中央土木所 20%】

7. Find eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$.【90 海洋光電所 10%】

8. Find eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$.【91 北科機電所 10%】

9. Find matrix A whose eigenvalues are 1, 2, 3 and eigenvectors are $(2,2,1)^t$, $(1,6,2)^t$, $(3,1,1)^t$, respectively.【90 清大資訊所 10%】

10. Find eigenvalues and eigenvectors of $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -8 & 4 & -6\\ 8 & 1 & 9\end{bmatrix}$.【92 交大電子所 6%】

11. 求特徵值與特徵向量：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}.$$【91 台科化工所 10%】

12. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ -2 & 0 & 5\end{bmatrix}$代表應力矩陣，求：

(a) 三個主應力大小；

(b) 三個主應力方向之單位向量。【91 嘉義土木所 15%】

13. Solve the generalized eigenvalue problem $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{Bx}$ where $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4k_1+k_2 & k_2\\ k_2 & 4k_1+k_2\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$.【88 台大土木所 10%】

14. 求特徵值與特徵向量：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0\end{bmatrix}.$$【91 中興土木所 25%】

15. Find the eigenvalue of matrix **A** defined below:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1-2i & -1-i & 2+2i\\ -4i & -i & 4i\\ -1-3i & -1-i & 2+3i\end{bmatrix}\quad \text{where } i=\sqrt{-1}.$$

For each real eigenvalue, find the corresponding eigenvector.【91 台大化工所 20%】

16. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^5$ 之特徵值。【89 高科營建所 15%】

17. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^3$ 之特徵值與行列式。【90 中興土木所 20%】

18. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 9 & -10 \end{bmatrix}$, find eigenvalues, eigenvectors and $\mathbf{A}^{100}$.【91 彰師機械所 20%】

19. Assume that $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. (a) Find the eigenvalues of **A**. (b) Find the eigenvectors of **A**.【91 台大電機所 20%】

20. $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\mathbf{y}'=\mathbf{A}^3\mathbf{y}$，$\mathbf{y}(0)=(2,-1,1)^t$，求特徵值及特徵向量，並解 $\mathbf{y}$。【89 中興土木所 20%】

21. Find the eigenvalues of **A**, where $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$.【89 交大電控所 10%】