提要 65：聯立非齊性 ODE 之非齊性解的解法--(四)矩陣解法(參數變換法)

聯立之非齊性微分方程式可表爲：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + r_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + r_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + r_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \tag{1'}$$

或

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} \tag{1''}$$

其中 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$、$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix}$。

這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution* y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p ，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } \boldsymbol{y} = \text{ 齊性解 } \boldsymbol{y}_h + \text{ 非齊性解 } \boldsymbol{y}_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

式(1”)之齊性解應由齊性微分方程式 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 研討出，其齊性解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x} \tag{3'}$$

其中 $\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根 λ 與特徵向量 $\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$ 可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(3’)代入 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ，則：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = \left(\boldsymbol{X} e^{\lambda x}\right)' \tag{4}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = \lambda \boldsymbol{X} e^{\lambda x} \tag{4'}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = 0 \tag{5}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5'}$$

因爲 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ 或 } \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{6}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6'}$$

展開式(6')，可得一個以 λ 爲未知數之一元 n 次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根 λ。最後再將特徵根 λ 代回式(5)，即可解出特徵向量 $\boldsymbol{X}$ ，利用重疊原理，故式(3)之齊性解即可研討出，如以下所示：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = C_1 \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{n1} \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{n2} \end{Bmatrix} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \begin{Bmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{nn} \end{Bmatrix} e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

其中 X_{ij} 之下標 j 表第 j 組特徵向量。

• 非齊性解的解析

本單元擬介紹如何以參數變換法解析問題之非齊性解 $\boldsymbol{y_p}$ 。在以前的介紹中得知一個概念，就是當問題之齊性解是表成 $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 時，以參數變換法解析問題之非齊性解時，可考慮問題之非齊性解爲 $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$，其中 u_1 及 u_2 爲與變數 x 相關之函數。現已知式(7)所示之齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = C_1 \begin{Bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ \vdots \\ X_{n1} \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{Bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ \vdots \\ X_{n2} \end{Bmatrix} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \begin{Bmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \\ \vdots \\ X_{nn} \end{Bmatrix} e^{\lambda_n x}$$

$$= \begin{Bmatrix} C_1 X_{11} e^{\lambda_1 x} + C_2 X_{12} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ C_1 X_{12} e^{\lambda_1 x} + C_2 X_{22} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots \\ C_1 X_{n1} e^{\lambda_1 x} + C_2 X_{n2} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{Bmatrix} \qquad (7')$$

$$= \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{Bmatrix}$$

故可考慮問題之非齊性解 $\boldsymbol{y}_p$ 爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad (8)$$

再將式(8)代回式(1’)即可解出其中之未知函數u_1、u_2、…、u_n：

$$\frac{d}{dx} \left(\begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \qquad (9)$$

上式可繼續化簡爲：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 X_{11} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 X_{12} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 X_{n1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \left(\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 X_{11} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 X_{12} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 X_{n1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & \lambda_n X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

故

$$\begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix} \left(\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \tag{10}$$

所以

$$\frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} e^{\lambda_1 x} & X_{12} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n} e^{\lambda_n x} \\ X_{12} e^{\lambda_1 x} & X_{22} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n} e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1} e^{\lambda_1 x} & X_{n2} e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn} e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \tag{11}$$

上式再對 x 作積分，即可求出未知函數 u_1 、 u_2 、…、 u_n ：

$$
\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \int \begin{bmatrix} X_{11}e^{\lambda_1 x} & X_{12}e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{1n}e^{\lambda_n x} \\ X_{12}e^{\lambda_1 x} & X_{22}e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{2n}e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}e^{\lambda_1 x} & X_{n2}e^{\lambda_2 x} & \cdots & X_{nn}e^{\lambda_n x} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} dx \tag{12}
$$

如此問題之非齊性解 $\boldsymbol{y}_p$ 即可求出。

範例一
試解出聯立常係數非齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - 6e^{-2x} \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-2x} \end{cases}$ 。

【解答】

原式可改寫為矩陣之型態如以下所示：

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

• 齊性解的解析

齊性解應由齊性微分方程式$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$研討出，其齊性解應考慮為：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

其中λ稱為特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表為：

$$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$$

其中$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$，稱為特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根λ與特徵向量$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$可以研討出，即可解出問題之解。今再將$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$代入$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，則：

$$\left(\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \right)' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

上式可繼續化簡為：

$$\lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

因爲$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展開上式，可得一個以λ爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)如下：

$$(-3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

亦即：

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda = -2 \text{ 、 } \lambda = -4$$

①當$\lambda = -2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-2x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (-X_1 + X_2)e^{-2x} = 0 \\ (X_1 - X_2)e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故第一組齊性解可表爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} e^{-2x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x}$$

②當 $\lambda = -4$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-4x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (X_1 + X_2) e^{-4x} = 0 \\ (X_1 + X_2) e^{-4x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組齊性解可表爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{Bmatrix} e^{-4x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x}$$

利用重疊原理，問題之齊性解可改寫爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \widetilde{C}_1 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + \widetilde{C}_2 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x}}$$

其中 $C_1 = \widetilde{C}_1 X_1$ 、 $C_2 = \widetilde{C}_2 X_1$ 。

• 非齊性解的解析

茲擬以參數變換法解析問題之非齊性解。因齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-2x} + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}e^{-4x} = \begin{Bmatrix} C_1e^{-2x} + C_2e^{-4x} \\ C_1e^{-2x} - C_2e^{-4x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

故可考慮非齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

再將上式代回原式：

$$\frac{d}{dx}\left(\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\begin{bmatrix} -2e^{-2x} & -4e^{-4x} \\ -2e^{-2x} & 4e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-2x} & -4e^{-4x} \\ -2e^{-2x} & 4e^{-4x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

再消去同類項：

$$\begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} -e^{-4x} & -e^{-4x} \\ -e^{-2x} & e^{-2x} \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{vmatrix}}\begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2e^{-6x}}\begin{Bmatrix} 4e^{-6x} \\ 8e^{-4x} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -2 \\ -4e^{2x} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

對 x 積分後可得：

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} -2 \\ -4e^{2x} \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} -2x \\ -2e^{2x} \end{Bmatrix}$$

所以問題之非齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{-4x} \\ e^{-2x} & -e^{-4x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2x \\ -2e^{2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2xe^{-2x} - 2e^{-2x} \\ -2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

而問題之通解應爲齊性解及非齊性解的和：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x} + \begin{Bmatrix} -2xe^{-2x} - 2e^{-2x} \\ -2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

習題

1. Solve the simultaneous differential equations
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x - y + e^{-t} \\ \dot{y}(t) = 2x - 2y + \sin(2t)e^{-t} \end{cases}$$
.【91 清大動機所 15%】

2. Solve $\begin{cases} x'' + 3x + y = \sin^2 t \\ y'' + 2y + 2x = \cos^2 t \end{cases}$.【88 清大動機所 15%】

3. Solve $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$.【91 成大機械所 20%】

4. Solve $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -6 & -9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$.【91 成大土木所 20%】

5. Solve $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 3y_2 - 8e^{-2t} \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + 2e^{-2t} \end{cases}$.【91 中興材料所 20%】