提要 64：聯立非齊性 ODE 之非齊性解的解法(三)--矩陣解法(非齊性項與齊性解重複時)

本單元之討論，相當於之前在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficient Method*)解析常係數微分方程式之非齊性解時，所引用之修正的原則(*Modification Rule*)。

聯立之非齊性微分方程式可表為：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + r_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + r_2(x) \\ \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + r_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \tag{1'}$$

或

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} \tag{1''}$$

其中 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$、$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix}$。

這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution* y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } \boldsymbol{y} = \text{ 齊性解 } \boldsymbol{y}_h + \text{ 非齊性解 } \boldsymbol{y}_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

式(1”)之齊性解應由齊性微分方程式 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 研討出，其齊性解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{3’}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根 λ 與特徵向量 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$ 可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(3’)代入 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ ，則：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\left(\boldsymbol{X}e^{\lambda x}\right)' \tag{4}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\lambda\boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{4’}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=0 \tag{5}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5’}$$

因爲 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$
\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ 或 } \det\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right) = 0 \tag{6}
$$

上式亦可表爲：

$$
\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6'}
$$

展開式(6’)，可得一個以λ爲未知數之一元 n 次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根λ。最後再將特徵根λ代回式(5)，即可解出特徵向量$\boldsymbol{X}$，故式(3)之齊性解即可研討出。

• 非齊性解的解析

待定係數法之修正的原則是這樣說的，當表一中所假設之非齊性解$\boldsymbol{y}_p$之函數型態已出現在齊性解中時，則所考慮之非齊性解需多乘上一個自變數 x。因所考慮之解法爲矩陣解法，故除了需多乘上一個自變數 x 外，尚需加上一個修正項。例如，若表一中所考慮之$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{C}e^{\gamma x}$已出現在齊性解中了，則所考慮之非齊性解$\boldsymbol{y}_p$應修正爲：

$$
\boldsymbol{y}_p = x\boldsymbol{C}e^{\gamma x} + \boldsymbol{u}e^{\gamma x} \tag{7}
$$

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 $\boldsymbol{y}_p$ 的基本原則

$\boldsymbol{r}(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 $\boldsymbol{y}_p$ 的四種函數型態
$\boldsymbol{r}(x)=\boldsymbol{k}x^n$，$n=0,1,2,\cdots$	$\boldsymbol{y}_p=\boldsymbol{k}_n x^n+\boldsymbol{k}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{k}_1 x+\boldsymbol{k}_0$
$\boldsymbol{r}(x)=\boldsymbol{k}e^{\gamma x}$	$\boldsymbol{y}_p=\boldsymbol{C}e^{\gamma x}$
$\boldsymbol{r}(x)=\begin{cases}\boldsymbol{k}\sin\alpha x\\ \boldsymbol{k}\cos\alpha x\end{cases}$	$\boldsymbol{y}_p=\boldsymbol{A}\sin\alpha x+\boldsymbol{B}\cos\alpha x$
$\boldsymbol{r}(x)=\begin{cases}\boldsymbol{k}e^{\gamma x}\sin\alpha x\\ \boldsymbol{k}e^{\gamma x}\cos\alpha x\end{cases}$	$\boldsymbol{y}_p=(\boldsymbol{A}\sin\alpha x+\boldsymbol{B}\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出聯立常係數非齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 - 6e^{-2x} \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-2x} \end{cases}$。

【解答】

原式可改寫爲矩陣之型態如以下所示：

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

• 齊性解的解析

齊性解應由齊性微分方程式$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$研討出，其齊性解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

其中λ稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$$

其中$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根λ與特徵向量$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$可以研討出，即可解出問題之解。今再將$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$代入$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，則：

$$\left(\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \right)' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

因為$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展開上式，可得一個以λ為未知數之一元二次方程式，稱為特徵方程式(*Characteristic Equation*)如下：

$$(-3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

亦即：

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

上式可因式分解為：

$$(\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

故問題之兩個特徵根為：

$$\lambda = -2 \text{、} \lambda = -4$$

①當$\lambda = -2$時

式(a)可改寫為：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-2x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (-X_1 + X_2)e^{-2x} = 0 \\ (X_1 - X_2)e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故第一組齊性解可表爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} e^{-2x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x}$$

②當 $\lambda = -4$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-4x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (X_1 + X_2)e^{-4x} = 0 \\ (X_1 + X_2)e^{-4x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組齊性解可表爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{Bmatrix} e^{-4x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x}$$

利用重疊原理，問題之齊性解可改寫爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \widetilde{C}_1 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + \widetilde{C}_2 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4x}}$$

其中 $C_1 = \widetilde{C}_1 X_1$ 、 $C_2 = \widetilde{C}_2 X_1$ 。

• 非齊性解的解析

茲擬以待定係數法解析問題之非齊性解。因非齊性項爲：

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

故由基本原則(*Basic Rule*)及修正的原則(*Modification Rule*)知，可考慮問題之非齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = x\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}e^{-2x} + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}e^{-2x} = \begin{Bmatrix} u_1xe^{-2x} + v_1e^{-2x} \\ u_2xe^{-2x} + v_2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

再將所考慮之非齊性解代回原式：

$$\begin{Bmatrix} u_1xe^{-2x} + v_1e^{-2x} \\ u_2xe^{-2x} + v_2e^{-2x} \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1xe^{-2x} + v_1e^{-2x} \\ u_2xe^{-2x} + v_2e^{-2x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\begin{Bmatrix} u_1(1-2x)e^{-2x} - 2v_1e^{-2x} \\ u_2(1-2x)e^{-2x} - 2v_2e^{-2x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3\left(u_1xe^{-2x} + v_1e^{-2x}\right) + \left(u_2xe^{-2x} + v_2e^{-2x}\right) \\ \left(u_1xe^{-2x} + v_1e^{-2x}\right) - 3\left(u_2xe^{-2x} + v_2e^{-2x}\right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -6e^{-2x} \\ 2e^{-2x} \end{Bmatrix}$$

比較係數知：

$$\begin{cases} u_1 - 2v_1 = -3v_1 + v_2 - 6 \\ -2u_1 = -3u_1 + u_2 \\ u_2 - 2v_2 = v_1 - 3v_2 + 2 \\ -2u_2 = u_1 - 3u_2 \end{cases}$$

解析以上聯立方程式可得：

$$u_1 = u_2 = -2 \text{ 、 } v_2 = v_1 + 4$$

可選擇：$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \end{Bmatrix}$ 、$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$ 、$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 \\ 0 \end{Bmatrix}$ 、…等等。

故問題之非齊性解爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = x\begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \end{Bmatrix}e^{-2x} + \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}e^{-2x} = \begin{Bmatrix} -2xe^{-2x} - 2e^{-2x} \\ -2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \end{Bmatrix}}$$

而問題之通解爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-2x} + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}e^{-4x} + \begin{Bmatrix} -2xe^{-2x} - 2e^{-2x} \\ -2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \end{Bmatrix}}$$

附註：這裏的通解包含齊性解及非齊性解。

習題

1. Solve $\begin{cases} x''+3x+y=\sin^2 t \\ y''+2y+2x=\cos^2 t \end{cases}$.【88 清大動機所 15%】

2. Solve $\begin{cases} y_1'=4y_1+3y_2-8e^{-2t} \\ y_2'=2y_1-y_2+2e^{-2t} \end{cases}$.【91 中興材料所 20%】

3. Solve $\mathbf{y}'=\mathbf{A}\mathbf{y}+\mathbf{g}$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{g}=\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}e^{-2t}$.【91 成大機械所 20%】

4. Solve the simultaneous differential equations
$$\begin{cases} \dot{x}(t)=x-y+e^{-t} \\ \dot{y}(t)=2x-2y+\sin(2t)e^{-t} \end{cases}.$$【91 清大動機所 15%】

5. Using matrix method solve the differential equation.
$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix} 0 \\ -4e^{3t} \\ -4e^{t} \end{bmatrix}.$$【87 交大電子所 10%】

6. Solve $\dot{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 2.5 & -10 \end{bmatrix}\mathbf{X}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.【87 北科電力所 20%】