提要 63：聯立非齊性 ODE 之非齊性解的解法(二)--矩陣解法(非齊性項與齊性解不重複)

本單元之討論，相當於之前在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficient Method*)解析常係數微分方程式之非齊性解時，所引用之基本原則(*Basic Rule*)。

聯立之非齊性微分方程式可表爲：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + r_1(x) \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + r_2(x) \\ \qquad\vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + r_n(x) \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix} \tag{1'}$$

或

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r} \tag{1''}$$

其中 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$、$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{r} = \begin{Bmatrix} r_1(x) \\ r_2(x) \\ \vdots \\ r_n(x) \end{Bmatrix}$。

這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution* y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } \boldsymbol{y} = \text{ 齊性解 } \boldsymbol{y}_h + \text{ 非齊性解 } \boldsymbol{y}_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

式(1”)之齊性解應由齊性微分方程式 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 研討出，其齊性解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中λ稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x} \tag{3'}$$

其中$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根λ與特徵向量$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(3')代入$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，則：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = \left(\boldsymbol{X} e^{\lambda x}\right)' \tag{4}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = \lambda \boldsymbol{X} e^{\lambda x} \tag{4'}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X} e^{\lambda x} = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5'}$$

因爲$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ 或 } \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{6}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6'}$$

展開式(6’)，可得一個以λ爲未知數之一元 n 次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根λ。最後再將特徵根λ代回式(5)，即可解出特徵向量 $\boldsymbol{X}$ ，故式(3)之齊性解即可研討出。

● 非齊性解的解析

待定係數法之基本原則是這樣說的，當非齊性項 $\boldsymbol{r}$ 爲表一中之四種基本函數型態時，其所假設之非齊性解 $\boldsymbol{y}_p$ 可引用如表一中所示之函數型態。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 $\boldsymbol{y}_p$ 的基本原則

$\boldsymbol{r}(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 $\boldsymbol{y}_p$ 的四種函數型態
$\boldsymbol{r}(x) = \boldsymbol{k}x^n$ ， $n = 0,1,2,\cdots$	$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{k}_n x^n + \boldsymbol{k}_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{k}_1 x + \boldsymbol{k}_0$
$\boldsymbol{r}(x) = \boldsymbol{k}e^{\gamma x}$	$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{C}e^{\gamma x}$
$\boldsymbol{r}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{k}\sin\alpha x \\ \boldsymbol{k}\cos\alpha x \end{cases}$	$\boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{A}\sin\alpha x + \boldsymbol{B}\cos\alpha x$
$\boldsymbol{r}(x) = \begin{cases} \boldsymbol{k}e^{\gamma x}\sin\alpha x \\ \boldsymbol{k}e^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$	$\boldsymbol{y}_p = (\boldsymbol{A}\sin\alpha x + \boldsymbol{B}\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出聯立常係數非齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 4y_2 + 2x^2 + 10x \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + x^2 + 9x + 3 \end{cases}$。

【解答】

原式可改寫爲矩陣之型態如以下所示：

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2x^2 + 10x \\ x^2 + 9x + 3 \end{Bmatrix}$$

• 齊性解的解析

齊性解應由齊性微分方程式$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$研討出，其齊性解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

其中λ稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$$

其中$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根λ與特徵向量$\boldsymbol{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}$可以研討出，即可解出問題之解。今再將$\boldsymbol{y_h} = \boldsymbol{X} e^{\lambda x}$代入$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，則：

$$\left(\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \right)' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

因爲$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展開上式，可得一個以λ爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)如下：

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$$

亦即：

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda=-2 \text{ 、 } \lambda=1$$

①當$\lambda=-2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 2-(-2) & -4 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-2x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (4X_1-4X_2)e^{-2x}=0 \\ (X_1-X_2)e^{-2x}=0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1=X_2$$

故第一組齊性解可表爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} e^{-2x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x}$$

②當 $\lambda = 1$ 時

式(a)可改寫為：

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -4 \\ 1 & -3-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} (X_1 - 4X_2)e^{x} = 0 \\ (X_1 - 4X_2)e^{x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = \frac{1}{4} X_1$$

故第二組齊性解可表為：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \frac{1}{4} X_1 \end{Bmatrix} e^{x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x}$$

利用重疊原理，問題之齊性解可改寫為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_h = \tilde{C}_1 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + \tilde{C}_2 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x}}$$

其中 $C_1 = \tilde{C}_1 X_1$ 、 $C_2 = \tilde{C}_2 X_1$ 。

• 非齊性解的解析

茲擬以待定係數法解析問題之非齊性解。因非齊性項為：

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2x^2 + 10x \\ x^2 + 9x + 3 \end{Bmatrix}$$

故由基本原則(*Basic Rule*)知，可考慮問題之非齊性解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} x^2 + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} x + \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 x^2 + v_1 x + w_1 \\ u_2 x^2 + v_2 x + w_2 \end{Bmatrix}$$

再將所考慮之非齊性解代回原式：

$$\begin{Bmatrix} u_1 x^2 + v_1 x + w_1 \\ u_2 x^2 + v_2 x + w_2 \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 x^2 + v_1 x + w_1 \\ u_2 x^2 + v_2 x + w_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2x^2 + 10x \\ x^2 + 9x + 3 \end{Bmatrix}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\begin{Bmatrix} 2u_1 x + v_1 \\ 2u_2 x + v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2(u_1 x^2 + v_1 x + w_1) - 4(u_2 x^2 + v_2 x + w_2) \\ (u_1 x^2 + v_1 x + w_1) - 3(u_2 x^2 + v_2 x + w_2) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2x^2 + 10x \\ x^2 + 9x + 3 \end{Bmatrix}$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 0 = 2u_1 - 4u_2 + 2 \\ 2u_1 = 2v_1 - 4v_2 + 10 \\ v_1 = 2w_1 - 4w_2 \\ 0 = u_1 - 3u_2 + 1 \\ 2u_2 = v_1 - 3v_2 + 9 \\ v_2 = w_1 - 3w_2 + 3 \end{cases}$$

解析以上聯立方程式可得：

$u_1 = -1$ 、 $u_2 = 0$ 、 $v_1 = 0$ 、 $v_2 = 3$ 、 $w_1 = 0$ 、 $w_2 = 0$

故問題之非齊性解爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}_p = \begin{Bmatrix} -x^2 \\ 3x \end{Bmatrix}}$$

而問題之通解爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x} + \begin{Bmatrix} -x^2 \\ 3x \end{Bmatrix}}$$

附註：這裏的通解包含齊性解及非齊性解。

習題

1. Solve $\begin{cases} x'+4y'-y=0 \\ x'+2y=e^{-t} \end{cases}$, $x(0)=y(0)=0$.【93 淡江航空所 20%】

2. Solve $\begin{cases} x''-2x'+3y'+2y=4 \\ 2y'-x'+3y=0 \end{cases}$, $x(0)=y(0)=x'(0)=0$.【90 雲科電機所 20%，93 台科電機所 15%】

3. Solve $\begin{cases} z''+y'=\cos x \\ y''-z=\sin x \end{cases}$, $z(0)=-1$, $z'(0)=-1$, $y(0)=1$, $y''(0)=0$.【93 高科光電所 10%】

4. Solve $\begin{cases} x''+2x'-x+y'-3y=\sin t \\ x'+4x+y'-2y=e^{-t} \end{cases}$.【93 成大環工所 10%】

5. Solve $\begin{cases} 2x'-y'+x+y=t \\ x'+y'+4x=3 \end{cases}$.【92 北科高分子所 10%】

6. Solve $\begin{cases} x_1'=x_1-x_2+\dfrac{e^{-t}}{1+t^2} \\ x_2'=2x_1-2x_2+\dfrac{2e^{-t}}{1+t^2} \end{cases}$.【93 高應電子所 10%】

7. Solve the initial value problem of the system $\begin{cases} y_1'=3y_1+3y_2+8 \\ y_2'=y_1+5y_2+4e^{3x} \end{cases}$, $\begin{Bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{14}{3} \end{Bmatrix}$.【90 淡江機械所 20%】

8. 若 $\dfrac{dx}{dt}+15x+10y-60=0$，$\dfrac{dx}{dt}-2\dfrac{dy}{dt}+5x-10y=0$，$x(0)=0$，$y(0)=0$，求 $x(t)=$? $y(t)=$? $t>0$。【91 成大資源所 10%】

9. Solve the system of differential equations $\begin{cases} 2x'-y'+x+y=t \\ x'+y'+4x=3 \end{cases}$.【90 成大土木所 20%】

10. Solve the following systems of ODEs

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-x-y=3 \\ \dfrac{dy}{dt}-5x-2y=5 \end{cases}$$.【91 中原化工所 15%】

11. 試解下列微分方程組（其中$D=d/dt$）：

$$\begin{cases}(D-2)x-3y=2e^{2t} \\ -x+(D-4)y=3e^{2t}\end{cases}，x(0)=-\frac{2}{3}，y(0)=\frac{1}{3}$$ 。【90 北科自動化所 20%】

12. Solve $\begin{cases}y_1'+y_2'-y_1=\cos 2t \\ y_1'+2y_2'=0\end{cases}$, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$.【88 雲科機械所 15%】

13. Solve $\begin{cases}2\dfrac{dx}{dt}-3x+y=4e^{t} \\ x+2\dfrac{dy}{dt}-3y=0\end{cases}$.【87 成大土木所 20%】

14. Solve $\begin{cases}x'-x-y=3t \\ x'+y'-5x-2y=5\end{cases}$.【87 雲科機械所 20%】

15. Solve $\begin{cases}x_1'+2x_1+x_2'=0 \\ x_1'-2x_1-2x_2=e^{t}\end{cases}$.【87 交大電子所 7%】

16. Solve the following system $\begin{cases}x'=3x-y-1 \\ y'=x+y+4e^{t}\end{cases}$.【91 成大工科所 14%】