

範例一

Solve the following differential equation and provide general solution of $y(x)$.

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = x^5$$

【2018 清大工科所】

【解答】

原式乘以 $F(x)$ ，可得

$$F \frac{dy}{dx} + 3x^2 Fy = x^5 F \quad (1)$$

再令

$$\boxed{3x^2 F = \frac{dF}{dx}} \quad (2)$$

故式(2)可改寫為：

$$F \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx} y = x^5 F \quad (3)$$

式(3)等號左邊可合併為一個項次的微分：

$$\frac{d(Fy)}{dx} = x^5 F$$

上式再對自變數 x 作積分：

$$\int \frac{d(Fy)}{dx} dx = \int x^5 F dx + C$$
$$\Rightarrow Fy = \int x^5 F dx + C$$

故通解可表為：

$$y = \frac{1}{F} \left(\int x^5 F dx + C \right) \quad (4)$$

只要再求出 $F(x)$ ，通解即可完全推導出來。將式(2)整理成自變數 x 放在等號右邊，應變數 F 放在等號的左邊，然後再對自變數 x 作積分，則：

$$\int \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{1}{F} dF = \int 3x^2 dx \quad (5)$$

上式加積分常數亦可，但並不影響最後的通解，因此求 $F(x)$ 的過程，通常不會加積分常數。所以式(5)積分後可得

$$\ln F = x^3$$

因此

$$F(x) = e^{x^3}$$

將 $F(x)$ 代回式(4)，則

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{e^{x^3}} \left(\int x^5 e^{x^3} dx + C \right) \\ &= e^{-x^3} \left[\int x^5 \frac{d(e^{x^3})}{3x^2} + C \right] \\ &= e^{-x^3} \left[\frac{1}{3} \int x^3 d(e^{x^3}) + C \right] \\ &= e^{-x^3} \left[\frac{1}{3} (x^3)(e^{x^3}) - \frac{1}{3} \int (e^{x^3}) d(x^3) + C \right] \\ &= e^{-x^3} \left[\frac{1}{3} (x^3)(e^{x^3}) - \frac{1}{3} e^{x^3} + C \right] \\ &= \frac{1}{3} (x^3 - 1) + C e^{-x^3} \end{aligned}$$

所以問題之通解為：

$$y = \frac{1}{3} (x^3 - 1) + C e^{-x^3}$$

參考文獻

1. 呂志宗，「【2018 教育部教學實踐研究計畫】(4K) 2018 清大：Solve $y' + 3x^2y = x^5$ 」，<https://youtu.be/-USz3QtfgFs>，2019。
2. 呂志宗，「【教學講義】提要 14：解一階 ODE 的第七個方法—兩項合併為一項的方法」，<http://t.cn/EiDRIjd>，2011。
3. 呂志宗，「【教學影片修訂】提要 013a：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/zh1exECKCko>，2011。
4. 呂志宗，「【教學影片修訂】提要 013bc：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/LIw5TSwK6n8>，2011。
5. 呂志宗，「【教學影片】提要 013b：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/oXif3lpCRwY>，2011。



6. 呂志宗，「【教學影片】提要 013c：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法」，<https://youtu.be/Mw6QKsnhKWc>，2011。
7. 呂志宗，「【教學影片】提要 013a：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法（加字幕）」，<https://youtu.be/ZUnz-r0RD34>，2011。
8. 呂志宗，「【教學影片】提要 013b：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法（加字幕）」，<https://youtu.be/MXhdYDQ40xo>，2011。
9. 呂志宗，「【教學影片】提要 013c：解一階 ODE 的第六個方法 - 非正合微分方程式的解法（加字幕）」，<https://youtu.be/pOr0V11a7FE>，2011。

編著：中華大學土木工程學系呂志宗教授 cclu@chu.edu.tw

**致謝：本單元承蒙教育部教學實踐研究計畫案 107-Z27-MO-002-01 之經費補助，
特此申謝！**