提要 62：聯立非齊性 ODE 之非齊性解的解法(一)--讓一個方程式僅含一個未知數

因之前讀者已相當熟悉單獨一個常係數非齊性微分方程式的解析方法，所以若能將聯立非齊性微分方程式化簡爲一個方程式只包含一個未知數的話，就可以方便的繼續引用以前的解析方法了。茲以範例一加以說明。

範例一
試解出聯立常係數非齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 4y_2 + 2x^2 + 10x & (1) \\ y_2' = y_1 - 3y_2 + x^2 + 9x + 3 & (2) \end{cases}$。

【解答】

首先要想辦法讓一個方程式只包含一個未知數。由原式之式(1)知：

$$y_2 = \frac{1}{4}\left(-y_1' + 2y_1 + 2x^2 + 10x\right) \tag{3}$$

代入式(2)後可得：

$$\left[\frac{1}{4}\left(-y_1' + 2y_1 + 2x^2 + 10x\right)\right]' = y_1 - 3\left[\frac{1}{4}\left(-y_1' + 2y_1 + 2x^2 + 10x\right)\right] + x^2 + 9x + 3$$

上式可化簡爲：

$$-y_1'' + 2y_1' + 4x + 10 = 4y_1 - 3\left(-y_1' + 2y_1 + 2x^2 + 10x\right) + 4\left(x^2 + 9x + 3\right)$$

再繼續整理後，可得：

$$y_1'' + y_1' - 2y_1 = 2x^2 - 2x - 2 \tag{4}$$

上式即爲只包含一個未知數的常係數非齊性微分方程式，讀者們之前應已很熟悉此一類型微分方程式的解法了。

●齊性解的解析

由齊性微分方程式 $y_1'' + y_1' - 2y_1 = 0$ 解析出問題之齊性解。令式(4)之齊性解解爲：

$$y_{1h} = e^{\lambda x}$$

代回式(4)，則

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} + \frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} - 2\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2 + \lambda - 2\right)e^{\lambda x} = 0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即$e^{\lambda x} \neq 0$，故：

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*)λ爲：

$$\lambda = -2 \text{、} \lambda = 1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解y_{1h}爲：

$$\boxed{y_{1h} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}}$$

•非齊性解的解析

可利用待定係數法解出式(4)之非齊性解y_{1p}，令：

$$y_{1p} = ax^2 + bx + c$$

再代回式(4)，則：

$$\left(ax^2 + bx + c\right)'' + \left(ax^2 + bx + c\right)' - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 2x^2 - 2x - 2$$

上式可繼續化簡爲：

$$(2a) + (2ax + b) - 2\left(ax^2 + bx + c\right) = 2x^2 - 2x - 2$$

經整理後可得：

$$(-2a)x^2 + (2a - 2b)x + (2a + b - 2c) = 2x^2 - 2x - 2$$

比較係數後，可知：

$$\begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - 2b = -2 \\ 2a + b - 2c = -2 \end{cases}$$

故可得知：

$$a = -1 \text{、} b = 0 \text{、} c = 0$$

所以非齊性解y_{1p}可表爲：

$$\boxed{y_{1p} = -x^2}$$

因此，式(4)之通解爲：

$$\boxed{y_1 = y_{ih} + y_{1p} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - x^2}$$

再將y_1代回式(3)，即可求出y_2：

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{1}{4}\left[-\left(C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-x^2\right)'+2\left(C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-x^2\right)+2x^2+10x\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[-\left(-2C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-2x\right)+2\left(C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-x^2\right)+2x^2+10x\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[4C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+12x\right] \\
&= C_1e^{-2x}+\frac{1}{4}C_2e^{x}+3x
\end{aligned}
$$

再整理一遍，問題之通解爲：

$$
\begin{cases}
y_1 = C_1e^{-2x}+C_2e^{x}-x^2 \\
y_2 = C_1e^{-2x}+\frac{1}{4}C_2e^{x}+3x
\end{cases}
$$

附註：這裏的通解包含齊性解及非齊性解。

習題

1. 請求解以下聯立微分方程：

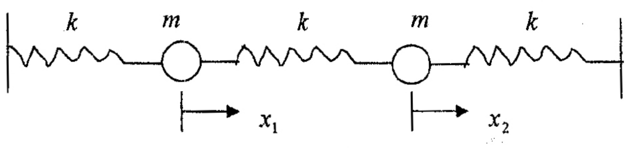
$$\begin{cases} 2\dfrac{dy_1}{dt}-\dfrac{dy_2}{dt}-\dfrac{dy_3}{dt}=0 \\ \dfrac{dy_1}{dt}+\dfrac{dy_2}{dt}=4t+2 \\ \dfrac{dy_2}{dt}+y_3=t^2+2 \end{cases}$$

，$y_1(0)=y_2(0)=y_3(0)=0$。【92 中央土木所 10%】

2. (a)請問如圖所示之彈簧-質點系統之運動方程式是否爲以下型式？

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1=-kx_1-k(x_2-x_1) \\ m\ddot{x}_2=-kx_2+k(x_2-x_1) \end{cases}$$

(b)請求此一系統之特徵值及特徵向量。



【94 中央土木所 15%】

3. If $x(t)$ and $y(t)$ satisfy the differential equations

$$\begin{cases} x'-y'+x=5 \\ x''-y'+3x-y=e^{3t} \end{cases}$$

where $'$ and $''$ denote $\dfrac{d}{dt}$ and $\dfrac{d^2}{dt^2}$, respectively. What are $x(t)$ and $y(t)$?【94 北科機電所 20%】

4. 試解下列微分方程式組（其中 $D=d/dt$ ）：

$$\begin{cases} (D-5)x-4y=-5t^2+6t+25, \quad x(0)=0 \\ (D-2)y-x=-t^2+2t+4, \quad y(0)=0 \end{cases}$$

。【92 北科自動化所 20%】

5. 試解下列聯立微分方程式：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dz}{dx}+4y=1 \\ \dfrac{d^2z}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+4z=x \end{cases}$$

。【92 高科控制所 20%】

6. Please find a complete solution of the linear differential system:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+2x+\dfrac{dy}{dt}+6y=2e^{t} \\ 2\dfrac{dx}{dt}+3x+3\dfrac{dy}{dt}+8y=-1 \end{cases}$$

.【93 中山環工所 15%】

7. 試解下列微分方程組（其中$D=d/dt$）：

$$\begin{cases} (D+1)x+(D-1)y=e^{t} \\ (D^2+D+1)x+(D^2-D+1)y=t^2 \end{cases}$$

。【93 北科自動化所 20%】

8. 試解下列微分方程組（其中$D=d/dt$）：

$$\begin{cases} (D-2)x+2Dy=2-4e^{2t} \\ (2D-3)x+(3D-1)y=0 \end{cases}$$

。【91 北科自動化所 20%】

9. Obtain the general solution of the following system $\begin{cases} x'-x-y=3t \\ x'+y'-5x-2y=5 \end{cases}$.【91 師大機電所 20%】

10. Solve the system $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+x-y-z=t \\ \dfrac{dx}{dt}+2\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{dz}{dt}-y=0 \\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}-4x+y=6e^{2t}-1 \end{cases}$.【90 交大電子所 13%】

11. Solve $\begin{cases} 2y'-x'+3y=0 \\ x''-2x'+3y'+2y=2 \end{cases}$, $y(0)=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.【88 北科冷凍所 15%，89 北科車輛所 20%】

12. Solve $\begin{cases} x'+2x-y'=0 \\ x'+y+x=t^2 \end{cases}$, $x(0)=y(0)=0$.【88 北科機電整合所 9%】

13. Solve $\begin{cases} 2\dfrac{d^2x}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}-4x=2t \\ 2\dfrac{dx}{dt}-4\dfrac{dy}{dt}-3y=0 \end{cases}$.【88 中央太空所 10%】

14. Find $A(x)$ and $B(x)$: $\begin{cases} \dfrac{dA}{dx} = -iBe^{-ix} \\ \dfrac{dB}{dx} = -iAe^{ix} \end{cases}$, $A(0)=1$, $B(0)=0$.【88 中央光電所 12%】

15. Two functions, $x(t)$ and $y(t)$ have the following relationships

$$\begin{cases} x' - y = 0 \\ x + y' = \sec x \ \tan x \end{cases}$$

Please find the general solutions of x and y.【91 台大電機所 15%】