提要 61：聯立齊性 ODE 的解法(三)--矩陣解法(重根)

本單元擬介紹重根時，聯立齊性微分方程式之矩陣解法。若聯立齊性微分方程式可表示如下：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{Bmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \tag{1'}$$

上式亦可簡寫爲：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' \tag{1''}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$。

式(1”)之解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{2'}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根 λ 與特徵向量 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$ 可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(2’)代入式(1”)，則：

$$\boldsymbol{AX}e^{\lambda x}=\left(\boldsymbol{X}e^{\lambda x}\right)' \tag{3}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{AX}e^{\lambda x}=\lambda\boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{3’}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}e^{\lambda x}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4’}$$

因爲 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}e^{\lambda x}\neq\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)=0\text{ 或 }\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0 \tag{5}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5'}$$

展開式(5’)，可得一個以λ爲未知數之一元 n 次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根λ。最後再將特徵根λ代回式(4)，即可解出特徵向量$\boldsymbol{X}$，故式(2)之解可研討出。因所考慮之問題爲特徵根有產生重根，故解析特徵向量$\boldsymbol{X}$時需較爲小心，此一重點將於後面及例題中加以說明。

- 當$\lambda_1 = \lambda_2$時

則問題之第一組解較爲單純，只要將λ_1代回式(4)，應即可找出問題之第一組特徵向量$\boldsymbol{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1$，並推求出問題之第一組解：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 x} \text{或} \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{X}_1 e^{\lambda_1 x} \tag{6}$$

然而，在推求第二組答案時，應考慮問題之解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_2 = x\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 x} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} \text{或} \boldsymbol{y}_2 = x\boldsymbol{X}_1 e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{u} e^{\lambda_1 x} \tag{7}$$

其中僅 $\boldsymbol{u}$ 爲未知矩陣。只要將式(7)代回式(1”)，即可解出未知之 $\boldsymbol{u}$ 矩陣，亦即問題之第二組解亦可求出。

- 當$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$時

同理，將λ_1代回式(4)，應即可找出問題之第一組特徵向量$\boldsymbol{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1$，並推求出

問題之第一組解：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 x} \text{或} \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{X}_1 e^{\lambda_1 x} \tag{8}$$

在推求第二組答案時，應考慮問題之解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_2 = x\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 x} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} \text{或} \boldsymbol{y}_2 = x\boldsymbol{X}_1 e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{u} e^{\lambda_1 x} \tag{9}$$

其中僅 $\boldsymbol{u}$ 爲未知矩陣。只要將式(9)代回式(1”)，即可解出未知之 $\boldsymbol{u}$ 矩陣，亦即問題之第二組解亦可求出。而問題之第三組答案應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{2}x^2\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}_1 e^{\lambda_1 x} + x\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} \text{或} \boldsymbol{y}_3 = \frac{1}{2}x^2 \boldsymbol{X}_1 e^{\lambda_1 x} + x\boldsymbol{u} e^{\lambda_1 x} + \boldsymbol{v} e^{\lambda_1 x} \tag{10}$$

再將式(10)代回式(1”)解出 $\boldsymbol{v}$ 矩陣。其餘之重根情況，亦可依此觀念研討出問題之解。

範例一
試解出聯立常係數齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = y_1 - 4y_2 \\ y_2' = y_1 - 3y_2 \end{cases}$ 。

【解答】

首先將聯立常係數齊性微分方程式寫成矩陣之型式如下：

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

再考慮問題之解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{b}$$

然後代回式(a)，則：

$$\left(\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \right)' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

合併等號左右兩邊後，可得：

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} - \lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

再整理爲：

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

上式絕對不要誤寫爲：

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\right)\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{\lambda x}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

因爲刮弧中之矩陣與一個數相減是不對的！

由於

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{\lambda x}\neq\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即特徵方程式可表爲：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -4\\1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

解此特徵方程式可得：

$$(1-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$$

經整理後可知：

$$\lambda^2+2\lambda+1=0$$

再加以因式分解爲：

$$(\lambda+1)(\lambda+1)=0$$

故問題之特徵根(*Eigenvalue*)爲：

$$\lambda=-1 、 \lambda=-1$$

- $\boxed{\text{當}\lambda=-1\text{時}}$

將$\lambda=-1$代回式(c)，則：

$$\left(\begin{bmatrix}1 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-(-1)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{-x}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{bmatrix} 1+1 & -4 \\ 1 & -3+1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{-x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{cases} (2X_1 - 4X_2)e^{-x} = 0 \\ (X_1 - 2X_2)e^{-x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = 2X_2$$

故問題之第一組解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \frac{1}{2}X_1 \end{Bmatrix}e^{-x} = X_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x}$$

爲單純起見，以下之解析，可考慮 $X_1 = 1$ 。

- 討論問題之第二組解

因問題係重根之情況，故問題之第二組解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = x\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}e^{-x}$$

再代回式(a)，則：

$$\left(x\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}e^{-x} \right)' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\left(x\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}e^{-x} \right)$$

上式亦可表爲：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} - x\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} - \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}e^{-x} = x\begin{Bmatrix} 1-2 \\ 1-\frac{3}{2} \end{Bmatrix}e^{-x} + \begin{Bmatrix} u_1 - 4u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{Bmatrix}e^{-x}$$

再繼續化簡爲：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} e^{-x} - \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{-x} = \begin{Bmatrix} u_1 - 4u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{Bmatrix} e^{-x}$$

由此可知：

$$\begin{cases} 2u_1 - 4u_2 = 1 \\ u_1 - 2u_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

可考慮

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_2 = 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \cdots$$

故問題之第二組解為：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = x \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} e^{-x} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{-x}$$

因原聯立微分方程式為線性且齊性之微分方程式，故問題之通解可引用重疊原理(*Superposition Principle*)，將通解表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} e^{-x} + C_2 \left(x \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} e^{-x} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{-x} \right)}$$

習題

1. Solve $\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{X}$.【90 中央電機所 15%】

2. 下列微分方程系統可表示爲矩陣 $\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{G}$ 的形式：$x_1' = 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2$、$x_2' = 3x_1 - 2x_2 + 5e^{2t}$、$x_3' = 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 9t$。
   (a) 求矩陣 $\mathbf{A}$ 的 eigenvalues。
   (b) 求矩陣 $\mathbf{A}$ 的 eigenvectors。
   (c) 今存在一矩陣 $\mathbf{P}$，使 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ 爲以 $\mathbf{A}$ 的 eigenvalues 爲主對角線元素之對角線矩陣，求 $\mathbf{P}$ 的反矩陣 $\mathbf{P}^{-1}$。
   (d) 以變數轉換 $\mathbf{Z} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ 求上列微分方程系統的通解。【91 北科環境所 25%】

3. Find general solution of the equation $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$, $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -6 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}$ where .【90 中興土木所 15%】

4. Given the matrix $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, find
   (a) the determinant of $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$;
   (b) the eigenvalues and corresponding eigenvectors of $\mathbf{A}$.
   (c) Solve the system $\dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Ay}$ where $\mathbf{y}$ is a column vector.【91 中興化工所 22%】

5. Solve $\begin{cases} x_1'' + 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2'' + 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$.【86 中央土木所 20%】

6. Solve $\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{X}$.【87 台科化工所 15%】