提要 60：聯立齊性 ODE 的解法(二)--矩陣解法(相異根)

本單元擬介紹相異根時，聯立齊性微分方程式之矩陣解法。若聯立齊性微分方程式可表示如下：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \qquad \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{1}$$

或

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{Bmatrix} = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \tag{1'}$$

上式亦可簡寫爲：

$$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{y}' \tag{1''}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$。

式(1”)之解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1e^{\lambda x} \\ X_2e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_ne^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{2'}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$，稱爲特徵向量(*Eigenvector*)。只要特徵根 λ 與特徵向量 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$ 可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(2')代入式(1")，則：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\left(\boldsymbol{X}e^{\lambda x}\right)' \tag{3}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\lambda\boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{3'}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\boldsymbol{0} \tag{4}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}e^{\lambda x}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4'}$$

因爲 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}e^{\lambda x}\neq\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$，所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right)=0 \text{ 或 } \det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0 \tag{5}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5'}$$

展開式(5’)，可得一個以 λ 爲未知數之一元 n 次方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根 λ。最後再將特徵根 λ 代回式(4)，即可解出特徵向量 $\boldsymbol{X}$ ，故式(2)之解可研討出。因所考慮之問題爲相異之特徵根，故解析特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 時較爲單純，茲以例題說明如後。

範例一

試解出聯立常係數齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 4y_2 \\ y_2' = y_1 - 3y_2 \end{cases}$ 。

【解答】

首先將聯立常係數齊性微分方程式寫成矩陣之型式如下：

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

再考慮問題之解為：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \tag{b}$$

然後代回式(a)，則：

$$\left(\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \right)' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

上式可繼續化簡為：

$$\lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x}$$

合併等號左右兩邊後，可得：

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} - \lambda \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

再整理為：

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{c}$$

上式絕對不要誤寫為：

$$\left(\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\right)\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{\lambda x}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

因爲刮弧中之矩陣與一個數相減是不對的！

由於

$$\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{\lambda x}\neq\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即特徵方程式可表爲：

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

解此特徵方程式可得：

$$(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$$

經整理後可知：

$$\lambda^2+\lambda-2=0$$

再加以因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$$

故問題之特徵根(*Eigenvalue*)爲：

$$\lambda=-2 \text{ 、 } \lambda=1$$

- 當 $\lambda=-2$ 時

將 $\lambda=-2$ 代回式(c)，則：

$$\left(\begin{bmatrix}2 & -4\\1 & -3\end{bmatrix}-(-2)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}e^{-2x}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{bmatrix} 2+2 & -4 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{-2x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{cases} (4X_1 - 4X_2)e^{-2x} = 0 \\ (X_1 - X_2)e^{-2x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故問題之第一組解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} e^{-2x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x}$$

- 當 $\lambda = 1$ 時

將 $\lambda = 1$ 代回式(c)，則：

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - (1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -4 \\ 1 & -3-1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{x} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式亦可表爲：

$$\begin{cases} (X_1 - 4X_2)e^{x} = 0 \\ (X_1 - 4X_2)e^{x} = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = \frac{1}{4} X_1$$

故問題之第二組解爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \frac{1}{4} X_1 \end{Bmatrix} e^{x} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x}$$

因原聯立微分方程式為線性且齊性之微分方程式，故問題之通解可引用重疊原理(*Superposition Principle*)，將通解表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \tilde{C}_1 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + \tilde{C}_2 X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-2x} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{Bmatrix} e^{x}}$$

其中 $C_1 = \tilde{C}_1 X_1$ 、 $C_2 = \tilde{C}_2 X_1$ 。

習題

1. Solve the following initial value problem:

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases},\ y_1(0) = 6,\ y_2(0) = 1.$$【91 清大通訊所 10%】

2. Solve $\begin{cases} y_1' - 4y_1 - y_2 = 0 \\ y_2' + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$.【90 成大機械所 10%】

3. A mechanical system is governed by the differential equations

$$\begin{cases} y_1'' = -5y_1 + 2y_2 \\ y_2'' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

In vector form, it becomes $\mathbf{y}'' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}'' = \mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. We try a vector solution of the form $\mathbf{y}'' = \mathbf{x}e^{\omega t}$, which implies to an eigenvalue problem $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Please use the above information to solve and find $y_1(t)$ and $y_2(t)$.【96 暨大土木所 20%】

4. Given $\begin{cases} x_1'' = -3x_1 + 2(x_2 - x_1) \\ x_2'' = -2(x_2 - x_1) \end{cases}$. If a solution $\mathbf{x}$ is assumed of the form, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} e^{\omega t} = \mathbf{k}e^{\omega t}$, solve the ODE.【91 交大機械所 25%】

5. Find the general solution of following equations $\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$.【91 中山電機所 15%】

6. Solve $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 5x - y \end{cases}$, $y(0) = 2$, $x(0) = -1$.【91 北科製造所 12%】

7. Solve $\begin{cases} 4x'' = -2x + y \\ 3y'' = 2x - 2y \end{cases}$.【89 成大土木所 15%】

8. Solve $\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x + 5y - z \\ z' = y - 3z \end{cases}$, $x(0) = 9$, $y(0) = 7$, $z(0) = 0$.【91 台大電機所 10%】

9. 已知$\dfrac{d\mathbf{X}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{X}$，$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$，試求解 $\mathbf{X}$。【91 中興環工所 10%】

10. Given a forced-vibration system described by

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = a\sin\Omega t \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 = b\sin\Omega t \end{cases} \tag{1}$$

(a) If we assign $a = 0$, $b = 1$, and $\Omega = 2$ in equations (1), and the initial conditions are $x_1(0) = x_2(0) = 0$ and $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$, find the solutions of equations (1).

(b) If the forcing frequency Ω is assigned as $\Omega = \sqrt{3}$, what is the relation between a and b in order that the solutions of equations (1) with zero initial conditions are bounded for all times? 【91 台大應力所 30%】

11. Given $\begin{cases} y_1'' = -3y_1 + 2(y_2 - y_1) \\ y_2'' = -2(y_2 - y_1) \end{cases}$ -- (1)

where y_1 and y_2 are functions of t. The initial conditions are $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$, $y'_1(0) = -2\sqrt{6}$, $y'_2(0) = \sqrt{6}$.

(a) If equation of (1) are expressed as $\mathbf{Y}'' = \mathbf{AY}$, what are the **Y** and **A**.

(b) Determine the eigenvalues and eigenvectors of **A**.

(c) If $\mathbf{Y} = \mathbf{X}e^{\omega t}$ is the solutions of (1), find **X**.

(d) Find the solution of (1). 【87 台大環工所 20%】