# 提要 59：聯立齊性 ODE 的解法(一)--讓一個方程式只包含一個未知數

齊性微分方程式的解法，之前已介紹過很多次，常見的大致上有兩類，一類是常係數齊性微分方程式$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$，另一類是 *Euler-Cauchy* 方程式$x^n\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1 x\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$。本單元所介紹之聯立齊性微分方程式，則與常係數齊性微分方程式有關。因之前讀者已相當熟悉單獨一個常係數齊性微分方程式的解析方法，所以若能將聯立齊性微分方程式化簡爲一個方程式只包含一個未知數的話，就可以方便的繼續引用以前的解析方法了。茲以範例一加以說明。

範例一

試解出聯立常係數齊性微分方程式之通解：$\begin{cases} y_1'' = -5y_1 + 2y_2 & (1) \\ y_2'' = 2y_1 - 2y_2 & (2) \end{cases}$。

【解答】

首先要想辦法讓一個方程式只包含一個未知數。由原式之式(1)知：

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1'' + 5y_1\right) \tag{3}$$

代入式(2)後可得：

$$\left[\frac{1}{2}\left(y_1'' + 5y_1\right)\right]'' = 2y_1 - 2\left[\frac{1}{2}\left(y_1'' + 5y_1\right)\right]$$

上式可化簡為：

$$\frac{1}{2}\frac{d^4 y_1}{dx^4} + \frac{5}{2}\frac{d^2 y_1}{dx^2} = 2y_1 - \frac{d^2 y_1}{dx^2} - 5y_1$$

再繼續整理後，可得：

$$\frac{d^4 y_1}{dx^4} + 7\frac{d^2 y_1}{dx^2} + 6y_1 = 0 \tag{4}$$

上式即為只包含一個未知數的常係數齊性微分方程式，讀者們之前應已很熟悉此一類型微分方程式的解法了。

令其解為：

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

代回式(4)，則

$$\frac{d^4\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^4} + 7\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} + 6\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡為：

$$\left(\lambda^4 + 7\lambda^2 + 6\right)e^{\lambda x} = 0$$

因為不希望所研討出之齊性解為零，亦即$e^{\lambda x} \neq 0$，故：

$$\lambda^4 + 7\lambda^2 + 6 = 0$$

上式可因式分解為：

$$(\lambda+i)(\lambda-i)(\lambda+\sqrt{6}i)(\lambda-\sqrt{6}i)=0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) $\lambda$ 為：

$$\lambda=-i \text{ 、 } \lambda=i \text{ 、 } \lambda=-\sqrt{6}i \text{ 、 } \lambda=\sqrt{6}i$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解 $y_1$ 為：

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{-ix}+C_2e^{ix}+C_3e^{-i\sqrt{6}x}+C_4e^{i\sqrt{6}x} \\ &= C_1(\cos x - i\sin x)+C_2(\cos x+i\sin x)+C_3\left(\cos\sqrt{6}x-i\sin\sqrt{6}x\right)+C_4\left(\cos\sqrt{6}x+i\sin\sqrt{6}x\right) \\ &= (C_1+C_2)\cos x+i(C_2-C_1)\sin x+(C_3+C_4)\cos\sqrt{6}x+i(C_4-C_3)\sin\sqrt{6}x \\ &= A\cos x+B\sin x+C\cos\sqrt{6}x+D\sin\sqrt{6}x \end{aligned}$$

其中 $A=C_1+C_2$ 、 $B=i(C_2-C_1)$ 、 $C=C_3+C_4$ 、 $D=i(C_4-C_3)$ 。

再將 $y_1$ 代回式(3)，即可求出 $y_2$ ：

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{1}{2}\Big[\left(A\cos x+B\sin x+C\cos\sqrt{6}x+D\sin\sqrt{6}x\right)'' \\ &\quad +5\left(A\cos x+B\sin x+C\cos\sqrt{6}x+D\sin\sqrt{6}x\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\left(-A\cos x-B\sin x-6C\cos\sqrt{6}x-6D\sin\sqrt{6}x\right) \\ &\quad +5\left(A\cos x+B\sin x+C\cos\sqrt{6}x+D\sin\sqrt{6}x\right)\Big] \\ &= 2A\cos x+2B\sin x-\frac{1}{2}C\cos\sqrt{6}x-\frac{1}{2}D\sin\sqrt{6}x \end{aligned}$$

再整理一遍，問題之通解為：

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = A\cos x+B\sin x+C\cos\sqrt{6}x+D\sin\sqrt{6}x \\ y_2 = 2A\cos x+2B\sin x-\dfrac{1}{2}C\cos\sqrt{6}x-\dfrac{1}{2}D\sin\sqrt{6}x \end{cases}}$$

附註：這裏的通解亦可稱為齊性解。

## 習題

1. Please find the real general solution $\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ of the following system $\begin{cases} y_1'=y_1+y_2 \\ y_2'=3y_1-y_2 \end{cases}$.【95 暨大土木所 20%】

2. Solve $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-3x+y=4e^t \\ x+2\dfrac{dy}{dt}-3y=0 \end{cases}$.【87 成大土木所 20%】

3. Solve the system of differential equations $\begin{cases} 2x'-y'+x+y=t \\ x'+y'+4x=3 \end{cases}$.【90 成大土木所 20%】

4. Solve $\begin{cases} x''+2x'-x+y'-3y=\sin t \\ x'+4x+y'-2y=e^{-t} \end{cases}$.【93 成大環工所 10%】

5. Solve $\begin{cases} x'+4y'-y=0 \\ x'+2y=e^{-t} \end{cases}$, $x(0)=y(0)=0$.【93 淡江航空所 20%】