提要 56：以待定係數法解析高階常係數非齊性 ODE 之特解(三)

爲清楚起見，仍將高階常係數非齊性常微分方程式之通解的解析方法完整呈現，說明如下。高階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=r(x) \tag{1}$$

其中a_{n-1}、…、a_1、a_0稱爲微分方程式之係數(*Coefficient*)，且爲常數；$r(x)$稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution*) y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y=\text{ 齊性解 } y_h+\text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解y_h是由齊性微分方程式$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，亦即需令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中λ爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲$e^{\lambda x}$表所假設的解y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程

式係一元 n 次方程式，其解可利用因式分解等方法研討出。

所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況。若問題屬於相異實根或複數根，則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

即使式(5)中含有複數根，式(5)之齊性解的表達方式仍是正確的。

若是考慮兩個根相同，即 $\lambda_1 = \lambda_2$ ，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{6}$$

若是考慮三個根相同，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

其他重根情況，亦可依此原則求出問題的齊性解。

• 非齊性解的解析—(C)相加的原則(*Sum Rule*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。在前兩個單元已介紹過待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$ ，且 $r(x)$ 爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。在這一單元的介紹中，擬再說明相加的原則(*Sum Rule*)。相加的原則是說，**當問題之非齊性項 $r(x)$ 為表一中所示非齊性項 $r(x)$ 之和時，則所假設的非齊性解 y_p 亦為表一中所示 y_p 之和。**

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases}k\sin\alpha x\\ k\cos\alpha x\end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases}ke^{\gamma x}\sin\alpha x\\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x\end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解： $y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x^2 + 4e^{-x}$ 。

【解答】

● 齊性解的解析

由齊性微分方程式 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ 解析出齊性解 y_h 。令齊性解 y_h 爲：

$$y_h = e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3} - 2\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} - \frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} + 2\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2\right)e^{\lambda x} = 0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即 $e^{\lambda x} \neq 0$ ，故：

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda = -1 \text{ 、 } \lambda = 1 \text{ 、 } \lambda = 2$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)爲：

$$\boxed{y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}}$$

● 非齊性解的解析

因爲非齊性項 $r(x) = 4e^{-x} + 4x^2$ ，由表一知，這是表一中之第一與第二種非齊性項 $r(x)$ 的和，因此可假設非齊性解 y_p 爲：

$$y_p = Ae^{-x} + Bx^2 + Cx + D$$

但是其中之自然指數所假設之函數型態已出現在齊性解 $y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x}$ 中了，故必須引用修正的原則，修正所假設之非齊性解 y_p 爲：

$$y_p = Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D$$

再代回原式：

$$\frac{d^3\left(Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D\right)}{dx^3} - 2\frac{d^2\left(Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D\right)}{dx^2}$$
$$-\frac{d\left(Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D\right)}{dx} + 2\left(Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D\right) = 4x^2 + 4e^{-x}$$

上式可化簡爲：

$$A(3-x)e^{-x} - 2\left[A(-2+x)e^{-x} + 2B\right] - \left[A(1-x)e^{-x} + 2Bx + C\right]$$
$$+2\left(Axe^{-x} + Bx^2 + Cx + D\right) = 4e^{-x} + 4x^2$$

再加以整理爲：

$$6Ae^{-3x} + 2Bx^2 + (-2B + 2C)x + (-4B - C + 2D) = 4e^{-x} + 4x^2$$

比較係數知：

$$A = \frac{2}{3} \text{ 、 } B = 2 \text{ 、 } C = 2 \text{ 、 } D = 5$$

即問題之非齊性解 y_p 爲：

$$\boxed{y_p = \frac{2}{3}xe^{-x} + 2x^2 + 2x + 5}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 爲：

$$\boxed{y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3e^{2x} + \frac{2}{3}xe^{-x} + 2x^2 + 2x + 5}$$

習題

1. Solve $y^{(4)} - 4y'' = 5x^2 - e^{2x}$.【94 中興電機所 10%】

2. Solve $\left(D^4 + 5D^2 - 36\right)y = 10e^{-2x} + 3\cos 3x$.【94 雲科電機所 10%】