提要 55：以待定係數法解析高階常係數非齊性 ODE 之特解(二)

爲清楚起見，仍將高階常係數非齊性常微分方程式之通解的解析方法完整呈現，說明如下。高階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=r(x) \tag{1}$$

其中a_{n-1}、…、a_1、a_0稱爲微分方程式之係數(*Coefficient*)，且爲常數；$r(x)$稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution*) y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p ，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y=\text{ 齊性解 } y_h+\text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，亦即需令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中λ爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲$e^{\lambda x}$表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程

式係一元 n 次方程式，其解可利用因式分解等方法研討出。

所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況。若問題屬於相異實根或複數根，則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

即使式(5)中含有複數根，式(5)之齊性解的表達方式仍是正確的。

若是考慮兩個根相同，即 $\lambda_1 = \lambda_2$ ，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{6}$$

若是考慮三個根相同，即 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

其他重根情況，亦可依此原則求出問題的齊性解。

• 非齊性解的解析—(B)修正的原則(*Modification Rule*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。在前一單元已介紹過待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$ ，且 $r(x)$ 爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。在這一單元的介紹中，擬再說明修正的原則(*Modification Rule*)。修正的原則是說，**當表一中所假設的非齊性解 y_p 已出現在齊性解 y_h 時，則所假設之非齊性解 y_p 必須多乘上一個自變數 x ；若新假設之非齊性解 y_p 又已出現在齊性解 y_h 中了，則所假設之非齊性解 y_p 必須再多乘上一個自變數 x ，其餘情況亦依此類推。**這個道理很類似遇到重根問題，第二個基底(*Basis*)必須多乘上一個自變數 x 一樣。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_n x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1 x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases} ke^{\gamma x}\sin\alpha x \\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解： $y''' + 3y'' + 3y' + y = 30e^{-x}$ 、 $y(0) = 3$ 、 $y'(0) = -3$ 、 $y''(0) = -47$ 。

【解答】

• 齊性解的解析

由齊性微分方程式 $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ 解析出齊性解 y_h 。令齊性解 y_h 爲：

$$y_h = e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3} + 3\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} + 3\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} + 3\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1\right)e^{\lambda x} = 0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即 $e^{\lambda x} \neq 0$ ，故：

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda = -1 \text{ 、 } \lambda = -1 \text{ 、 } \lambda = -1$$

由重根原理及重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)爲：

$$\boxed{y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{x} + C_2 x^2 e^{x}}$$

• 非齊性解的解析

因爲非齊性項爲$r(x)=30e^{-x}$，由表一知，可假設非齊性解y_p爲：

$$y_p = Ae^{-x}$$

但是以上所假設之函數型態已出現在齊性解$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{x} + C_2x^2e^{x}$中了，故必須引用修正的原則，修正所假設之非齊性解$y_p$爲：

$$y_p = Axe^{-x}$$

然而，以上所假設之函數型態亦已出現在齊性解$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{x} + C_2x^2e^{x}$中了，故必須修正所假設之非齊性解$y_p$爲：

$$y_p = Ax^2e^{-x}$$

非常巧合的是，以上所假設之函數型態亦已出現在齊性解$y_h = C_1e^{-x} + C_2xe^{x} + C_2x^2e^{x}$中了，故必須再修正所假設之非齊性解$y_p$爲：

$$y_p = Ax^3e^{-x}$$

然後再代回原式：

$$\frac{d^3\left(Ax^3e^{-x}\right)}{dx^3} + 3\frac{d^2\left(Ax^3e^{-x}\right)}{dx^2} + 3\frac{d\left(Ax^3e^{-x}\right)}{dx} + 3\left(Ax^3e^{-x}\right) = 30e^{-x}$$

上式可化簡爲：

$$A\left(6-18x+9x^2-x^3\right)e^{-x} + A\left(18x-18x^2+3x^3\right)e^{-x} + A\left(9x^2-3x^3\right)e^{-x} + Ax^3e^{-x} = 30e^{-x}$$

再加以整理爲：

$$6Ae^{-x} = 30e^{-x}$$

比較係數知：

$$A = 5$$

即問題之非齊性解 y_p 爲：

$$\boxed{y_p = 5x^3 e^{-x}}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 爲：

$$\boxed{y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_2 x^2 e^{-x} + 5x^3 e^{-x}}$$

而

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 (1 - x) e^{-x} + C_3 \left(2x - x^2\right) e^{-x} + 5\left(3x^2 - x^3\right) e^{-x}$$

$$y'' = C_1 e^{-x} + C_2 (-2 + x) e^{-x} + C_3 \left(2 - 4x + x^2\right) e^{-x} + 5\left(6x - 6x^2 + x^3\right) e^{-x}$$

再代入初始條件推求滿足初始條件之特解：

$$\begin{cases} y(0) = C_1 e^{-0} + C_2 (0) e^{-0} + C_2 (0)^2 e^{-0} + 5(0)^3 e^{-0} = 3 \\ y'(0) = -C_1 e^{-0} + C_2 (1 - 0) e^{-0} + C_2 (0)^2 e^{-0} + 5(0)^3 e^{-0} = 3 \\ y''(0) = C_1 e^{-0} + C_2 (-2 + 0) e^{-0} + C_3 \left[2 - 4(0) + (0)^2\right] e^{-x} + 5\left[6(0) - 6(0)^2 + (0)^3\right] e^{-x} \end{cases}$$

故 $C_1 = 3$ 、 $C_2 = 0$ 、 $C_3 = -25$ ，因此滿足初始條件之特解爲：

$$\boxed{y = 3e^{-x} - 25x^2 e^{-x} + 5x^3 e^{-x}}$$

習題

1. Find the form of y_p by undetermined coefficient method $y'''' + y''' = 1 - x^2e^{-x}$.【92 台大電機所 10%】

2. Find the general solution of $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = -7\cos 3x$.【94 台科電機所 15%】

3. Solve $\left(D^5 - 3D^4 + 3D^3 - D^2\right)y = x^2 + 2x + 3e^x$.【93 北科高分子所 20%】

4. Solve $y''' + y' = 2 + 2\sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.【93 交大電子所 12%】

5. 求解以下之四階常微分方程之通解 $y(x) = ?$

   $y^{(4)} + 10y^{(2)} + 9y = 2\sinh x$.【96 中央土木所 15%】

6. Solve $y''' - y'' - 8y' + 12y = 7e^{2x}$.【90 台科電機所 10%】

7. Solve $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$.【91 暨南電機所 20%】

8. Solve $y''' + 2y'' - y' - 2y = x^2 + 2e^x$.【91 交大電子所 5%】

9. Solve $y^{(4)} + 11y^{(3)} + 36y'' + 16y' - 64y = -3e^{-4x} + 2\cos(2x)$.【90 成大製造所 10%】

10. Find a third order linear differential equation having the given function as general solution $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{-3x} + \dfrac{7}{10}x^2e^{2x}$.【台大化工所 10%】