提要 54：以待定係數法解析高階常係數非齊性 ODE 之特解(一)

高階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=r(x) \tag{1}$$

其中 a_{n-1} 、… 、 a_1 、 a_0 均爲常數； $r(x)$ 稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution* y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p ，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式 $\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$ 研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，即令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元 n 次方程式，其解可利用因式分解等方法研討出。

所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況。若問題屬於相異實根或

複數根，則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{5}$$

即使式(5)中含有複數根，式(5)之齊性解的表達方式仍是正確的。

若是考慮兩個根相同，即$\lambda_1 = \lambda_2$，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{6}$$

若是考慮三個根相同，即$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，則問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{7}$$

其他重根情況，亦可依此原則求出問題的齊性解。

• 非齊性解的解析—(A)基本原則(*Basic Rule*)

非齊性解y_p是由非齊性微分方程式$\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。待定係數法僅適用於常係數(*Constant Coefficient*)微分方程式$\dfrac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \dfrac{dy}{dx} + a_0 y = r(x)$，且$r(x)$爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_n x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1 x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases} ke^{\gamma x}\sin\alpha x \\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解：$y''' - 2y'' - y' + 2y = 4x^2$。

【解答】

● 齊性解的解析

由齊性微分方程式 $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ 解析出齊性解 y_h。令齊性解 y_h 為：

$$y_h = e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3} - 2\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} - \frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} + 2\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡為：

$$\left(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2\right)e^{\lambda x} = 0$$

因為不希望所研討出之齊性解為零，亦即 $e^{\lambda x} \neq 0$，故：

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

上式可因式分解為：

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 為：

$$\lambda = -1 \text{、} \lambda = 1 \text{、} \lambda = 2$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)為：

$$\boxed{y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}}$$

● 非齊性解的解析

因為非齊性項 $r(x) = 4x^2$，由表一知，可假設非齊性解 y_p 為：

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

再代回原式：

$$\frac{d^3\left(ax^2+bx+c\right)}{dx^3}-2\frac{d^2\left(ax^2+bx+c\right)}{dx^2}-\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{dx}+2\left(ax^2+bx+c\right)=4x^2$$

上式可化簡爲：

$$0-2(2a)-(2ax+b)+2\left(ax^2+bx+c\right)=4x^2$$

再加以整理爲：

$$2ax^2+(-2a+2b)x+(-4a-b+2c)=4x^2$$

比較係數知：

$$\begin{cases}2a=4\\-2a+2b=0\\-4a-b+2c=0\end{cases}$$

故可解析出：

$$a=2 \text{ 、 } b=2 \text{ 、 } c=5$$

即問題之非齊性解 y_p 爲：

$$\boxed{y_p=2x^2+2x+5}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 爲：

$$\boxed{y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+C_3e^{2x}+2x^2+2x+5}$$

習題

1. 解四階線性 ODE： $y^{(4)}+16y=-1$ 。【94 北科光電所 10%】

2. $(D^2+2D+10)(D^4-D^2)y=\sin 3x+3x^2+xe^{-x}$. Find the form of particular solution, and do not solve it.【95 清大電機所 4%】

3. Solve the differential equation $y'''-4y''+13y'+50y=-4\cos 2x$.【93 雲科電機所 10%】

4. Solve $y'''+2y''=e^x\cos x$.【92 台大電機所 10%】

5. Solve $y'''+3y''+3y'+y=8\sin x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=-3$, $y''(0)=5$.【94 師大機電所 14%】

6. Solve $y'''-y'=25\cos 2x$.【91 師大機電所 15%，91 暨南電機所 10%】

7. Solve $y'''-4y''+y'+6y=\left(e^{-2x}-2\right)^2$.【90 清大動機所 10%】

8. Solve $y''''+y''=3x^2+4\sin x-2\cos x$.【90 中興化工所 15%】

9. Solve $y''''-10y''+9y=x^2+1$.【90 屏科土木所 10%】

10. Solve $y'''-4y''+y'+6y=\cos 2x$.【91 台大機械所 10%】

11. (a) Find a third order constant coefficient O.D.E. with the following function as a solution $y=ae^x+b\cos x$. (b) Find a second order linear O.D.E. with the above function as a solution.【86 交大控制所 12%】

12. Solve $(D^4+8D^2+16)y=-\sin x$.【91 海洋電機所 10%】

13. Consider a third order ODE $y'''+3y''-y'-3y=3$.
   (a) Find a particular solution of $y'''+3y''-y'-3y=3$.
   (b) Find three linearly independent solutions of $y'''+3y''-y'-3y=0$. Justify that the solutions are independent.
   (c) Find the general solution of $y'''+3y''-y'-3y=3$.
   (d) Explain the terminology "general solution". Can you think a way to show that the solution you obtain in (c) is the general solution? Write out the procedure clearly.
   (e) Find another particular solution of $y'''+3y''-y'-3y=3$. 【91 元智電機所 35%】