提要 53：高階常係數齊性 ODE 之通解(三)--複數根

相異複數根情況與相異實根時之通解的解法，其觀念完全一樣，之所以會分爲兩部分加以說明，主要是相異複數根時之通解可以利用尤拉公式(*Euler Formula*)加以化簡，其詳細情況，說明於後。

高階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0 \tag{1}$$

其中 a_{n-1} 、… 、 a_1 、 a_0 均爲常數。

式(1)之解析過程與二階常係數齊性常微分方程式之解析過程幾乎完全一樣。式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{3}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元 n 次方程式，其解可利用因式分解等方法研討出。

因所考慮之情況爲複數根，若令所得出之 n 個特徵根分別爲 λ_1 、 λ_2 、… 、 λ_n ，亦即所研討出之問題的解分別爲：

$$y(x)=y_1=e^{\lambda_1 x} 、 y(x)=y_2=e^{\lambda_2 x} 、… 、 y(x)=y_n=e^{\lambda_n x}$$

則由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x} \tag{4}$$

式(4)稱為問題之通解(*General Solution*)。

因式(4)中之特徵根為複數根，故可利用尤拉公式(*Euler Formula*)：

$$\boxed{e^{\pm i\beta x} = \cos \beta x \pm i \sin \beta x} \tag{5}$$

將通解進一步加以化簡。其化簡過程與二階常係數齊性微分方程式之重根問題的處理方式完全相同，請讀者參考該單元之詳細說明。其實，即使式(4)沒有進一步加以化簡，式(4)仍可視為式(1)之通解。

範例一

試解出初始值問題之解： $y''' - y'' + 100y' - 100y = 0$ ， $y(0) = 4$ 、 $y'(0) = 11$ 、 $y''(0) = -299$ 。

【解答】

令 $y(x) = e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3} - \frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} + 100\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} - 100\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^3 - \lambda^2 + 100\lambda - 100\right)e^{\lambda x} = 0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x} \neq 0$ ，故：

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 100\lambda - 100 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda + 10i)(\lambda - 10i)(\lambda - 1) = 0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda = -10i \text{ 、 } \lambda = 10i \text{ 、 } \lambda = 1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{-i10x} + C_2e^{i10x} + C_3e^x \\ &= C_1(\cos 10x - i\sin 10x) + C_2(\cos 10x + i\sin 10x) + C_3e^x \\ &= (C_1 + C_2)\cos 10x + i(C_2 - C_1)\sin 10x + C_3e^x \\ &= A\cos 10x + B\sin 10x + C_3e^x \end{aligned}}$$

其中 $A = C_1 + C_2$ 、 $B = i(C_2 - C_1)$ 。

接著，再繼續推求滿足初始條件之特解，將 $y(x)$ 代入初始條件中：

$$\begin{cases} y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 + C_3e^0 = 4 \\ y'(0) = -10A\sin 0 + 10B\cos 0 + C_3e^0 = 11 \\ y''(0) = -100A\cos 0 - 100B\sin 0 + C_3e^0 = -299 \end{cases}$$

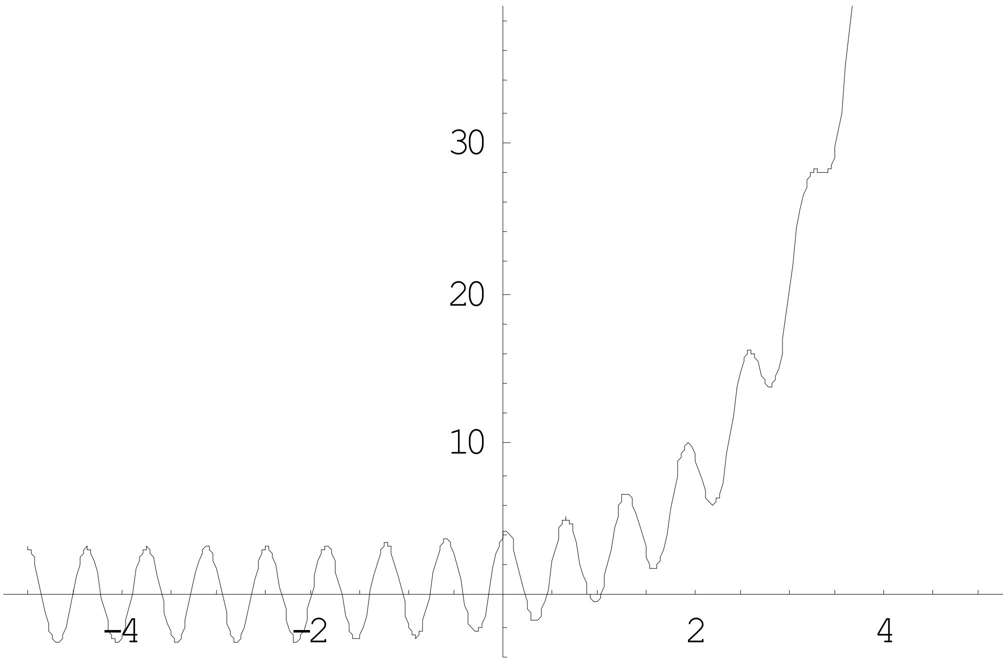
上式可繼續整理爲：

$$\begin{cases} A + C_3 = 4 \\ 10B + C_3 = 11 \\ -100A + C_3 = -299 \end{cases}$$

故 $A = 3$ 、 $B = 1$ 、 $C_3 = 1$，故滿足初始條件之特解爲：

$$\boxed{y(x) = 3\cos 10x + \sin 10x + e^x}$$

若以 Mathematica 軟體畫圖，則需先輸入 $Plot[3\times(\mathrm{Cos}[10\cdot x] + Sin[10\cdot x]] + Exp[x]$, { x ,-5 , 5 }]，然後按 Shift + Enter 鍵，其圖形如以下所示：



(水平軸爲 x 軸，垂直軸爲 y 軸)

習題

1. Find the general solution of the following equation $y^{(7)}+18y^{(5)}+81y'''=0$。【94 台科電機所 15%】

2. Solve $\left(D^2-2D+5\right)^2 y=0$.【93 輔仁電子所 10%】

3. Solve $\left(D^2+\lambda^2\right)^2 y=0$, λ is real.

4. 已知$y=\sin x$爲$y^{(4)}+2y'''+11y''+2y'+10y=0$之一解，求通解。【92 中興土木所 15%】

5. Solve $y''''+y=0$.【86 中山材料所 7%】

6. (a) Find all solutions of the differential equation $y'''+3y''+y'+3y=0$.
   (b) Explain why the set of solutions you just found in part (a) actually contains all the solutions.【88 交大電控所 10%】