提要 52：高階常係數齊性 ODE 之通解(二)--重根

爲完整起見，仍將問題之解法詳細說明如下。高階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0 \tag{1}$$

其中a_{n-1}、…、a_1、a_0均爲常數。

式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中λ稱爲特徵根(*Characteristic Root*)，爲待解之未知數。再將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

則

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即$y=e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{3}$$

上式稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，其解可利用因式分解等方法研討出。

• 考慮二重根

若考慮之情況爲二重根，亦即考慮兩個特徵根λ_1與λ_2完全相同，則僅能研討出一個問題之解：

$$y(x)=y_1=e^{\lambda_1 x} \tag{4}$$

另一解採用降階法(*Reduction of Order*)即可研討出：

$$y(x)=y_2=xy_1=xe^{\lambda_1 x} \tag{5}$$

式(4)與式(5)即爲通解(*General Solution*)中λ_1與λ_2所對應之基底(*Basis*)。

• 考慮三重根

若考慮之情況爲三重根，亦即考慮三個特徵根λ_1、λ_2與λ_3完全相同，則所研討出之通解中所對應的三個基底爲：

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \text{、} y_2 = xe^{\lambda_1 x} \text{、} y_3 = x^2 e^{\lambda_1 x} \tag{6}$$

其他情況，可依此方式繼續推求通解中之基底。

範例一
試解出微分方程式之通解： $y^{(5)}-3y^{(4)}+3y'''-y''=0$ 。

【解答】

令 $y(x)=e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\frac{d^5\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^5}-3\frac{d^4\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^4}+3\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3}-\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^5-3\lambda^4+3\lambda^3-\lambda^2=0$$

上式可因式分解爲：

$$\lambda^2(\lambda-1)^3=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=0 \text{ 、 } \lambda=0 \text{ 、 } \lambda=1 \text{ 、 } \lambda=1 \text{ 、 } \lambda=1$$

此係呈二重根與三重根現象，由式(4)-(6)得知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4xe^x+C_5x^2e^x}$$

習題

1. Please solve the following initial value problem

$$y''' - y'' - y' + y = 4e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$$【96 暨大研究所】

2. Solve $y^{(8)} + 17y^{(6)} + 88y^{(4)} + 144y'' = 0$, where $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.【86 中正電機所 10%】