提要 51：高階常係數齊性 ODE 之通解(一)--相異實根

相異實根情況與相異複數根時之通解的解法，其觀念完全一樣，之所以會分爲兩部分加以說明，主要是相異複數根時之通解可以利用尤拉公式(*Euler Formula*)加以化簡，其詳細情況，將於相異複數根時詳加說明。

高階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0 \tag{1}$$

其中 a_{n-1}、…、a_1、a_0 均爲常數。

式(1)之解析過程與二階常係數齊性常微分方程式之解析過程幾乎完全一樣。式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^n\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+a_0\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0 \tag{3}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元 n 次方程式，其解可利用因式分解等方法研討出。

因所考慮之情況爲相異實根，若令所得出之 n 個特徵根分別爲 λ_1、λ_2、…、λ_n，亦即所研討出之問題的解分別爲：

$$y(x)=y_1=e^{\lambda_1 x}、y(x)=y_2=e^{\lambda_2 x}、\ldots、y(x)=y_n=e^{\lambda_n x}$$

則由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$\boxed{y(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+C_ne^{\lambda_n x}} \tag{4}$$

式(4)稱爲問題之通解(*General Solution*)。

範例一
試解出微分方程式之通解： $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ 。

【解答】

令 $y(x) = e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\frac{d^3\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^3} - 2\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2} - \frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx} + 2\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡為：

$$\left(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2\right)e^{\lambda x} = 0$$

因為不希望所研討出之解為零，亦即 $e^{\lambda x} \neq 0$ ，故：

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

上式可因式分解為：

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 為：

$$\lambda = -1 \text{、} \lambda = 1 \text{、} \lambda = 2$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**為：

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}}$$

習題

1. Solve $y''' - y'' - y' + y = 0$，$y(0) = 2$，$y'(0) = 1$，$y''(0) = 0$.【93 師大機電所 12%】

2. Solve $y'''' - 8y'' + 15y = 0$.【91 中興環工所 10%】

3. Solve $x^3 y''' + 5x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$.【91 台大電機所 10%】