提要 48：認識高階 ODE 之重疊原理(*Superposition Principle*)

已知高階之線齊性微分方程式(*Linear Homogeneous Differential Equation*)為：

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=0 \tag{1}$$

則其解可進行疊加之運算。此為相當重要之觀念，其內容說明如下：

若 y_1 、 y_2 、…、 y_n 分別為線齊性微分方程式

$\frac{d^n y}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=0$ 之解，

則 $y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$ (c_1 、 c_2 、…、 c_n 為任意常數)亦為原式之解，稱為通解(*General Solution*)。而 y_1 、 y_2 、…、 y_n 稱為通解中之基底(*Basis*)。

【證明】

因為 y_1 、 y_2 、…、 y_n 分別為線齊性微分方程式之解，故：

$$\begin{aligned}
&\frac{d^n y_1}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy_1}{dx}+p_0(x)y_1=0\\
&\frac{d^n y_2}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy_2}{dx}+p_0(x)y_2=0\\
&\vdots\\
&\frac{d^n y_n}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy_n}{dx}+p_0(x)y_n=0
\end{aligned}$$

以上各式分別乘以 c_1 、 c_2 、…、 c_n ，再相加後可得：

$$\begin{aligned}
&\left(c_1\frac{d^n y_1}{dx^n}+c_2\frac{d^n y_2}{dx^n}+\cdots+c_n\frac{d^n y_n}{dx^n}\right)\\
&+p_{n-1}(x)\left(c_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+c_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+c_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right)\\
&+\cdots\\
&+p_1(x)\left(c_1\frac{dy_1}{dx}+c_2\frac{dy_2}{dx}+\cdots+c_n\frac{dy_n}{dx}\right)\\
&+p_0(x)(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n)=0
\end{aligned}$$

並可改寫為：

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^n\left(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\right)}{dx^n}\\
&+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}\left(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\right)}{dx^{n-1}}\\
&+\cdots\\
&+p_1(x)\frac{d\left(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\right)}{dx}\\
&+p_0(x)\left(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n\right)=0
\end{aligned}
$$

由此可知$c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n$亦為線齊性微分方程式：

$$\frac{d^ny}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y=0$$

之解。

附註：重疊原理僅適用於線性(*Linear*)且齊性(*Homogeneous*)之微分方程式。以下舉兩反例說明之 。

範例一
已知 $y=2+\cos x$ 與 $y=2+\sin x$ 爲非齊性微分方程式 $y''+y=2$ 之解，但是 $2(2+\cos x)$ 或 $(2+\cos x)+(2+\sin x)$ 並非原式 $y''+y=2$ 之解。

【說明】

(1) 將 $y=2+\cos x$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (2+\cos x)''+(2+\cos x)\\ &=-\cos x+2+\cos x\\ &=2\\ &=\text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y=2+\cos x$ 確爲原式之解。

(2) 將 $y=2+\sin x$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (2+\sin x)''+(2+\sin x)\\ &=-\sin x+\sin x+2\\ &=2\\ &=\text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y=2+\sin x$ 卻爲原式之解。

(3) 將 $y=2(2+\cos x)$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (4+2\cos x)''+(4+2\cos x)\\ &=-2\cos x+4+2\cos x\\ &=4\\ &\neq\text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y=2(2+\cos x)$ (即 $c_1=2$，$c_2=0$) 並非原式之解。因爲原式爲非齊性微分方程式，故重疊原理並不適用。

(4) 將 $y=(2+\cos x)+(2+\sin x)$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (4+\cos x+\sin x)''+(4+\cos x+\sin x)\\ &=-\cos x-\sin x+4+\cos x+\sin x\\ &=4\\ &\neq\text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y=(2+\cos x)+(2+\sin x)$ (即 $c_1=1$，$c_2=1$) 並非原式之解。因爲原式爲非齊性微分方程式，故重疊原理並不適用。

範例二

已知 $y=x^2$ 與 $y=1$ 爲非線性微分方程式 $yy''-xy'=0$ 之解，但是 $y=-x^2$ 與 $y=x^2+1$ 並不是非線性微分方程式之解。

【說明】

(1) 將 $y=x^2$ 代回原式

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (x^2)(x^2)''-x(x^2)' \\ &= (x^2)(2)-x(2x) \\ &= 0 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y=x^2$ 爲原式之解。

(2) 將 $y=1$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (1)(1)''-x(1) \\ &= (1)(0)-x(0) \\ &= 0 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y=1$ 確爲原式之解。

(3) 將 $y=-x^2$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= \left(-x^2\right)\left(-x^2\right)''-x\left(-x^2\right)' \\ &= \left(-x^2\right)(-2)-x(-2x) \\ &= 2x^2+2x^2 \\ &= 4x^2 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y=-x^2$(即 $c_1=-1$ 、 $c_2=0$)並非原式之解，因爲原式爲非線性微分方程式，故重疊原理並不適用。

(4) 將 $y=x^2+1$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= \left(x^2+1\right)\left(x^2+1\right)''-x\left(x^2+1\right)' \\ &= \left(x^2+1\right)(2)-x(2x) \\ &= 2 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以$y=x^2+1$ (即$c_1=1$、$c_2=1$)並非原式之解。同理，其原因爲原式並非是線性的微分方程式之故，因此重疊原理並不適用。

習題

1. Let the scalar functions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ be two different solutions of the following differential equation $\sin t\dfrac{d^2x}{dt^2}+\cos t\dfrac{dx}{dt}+x=5$, then is $3x_1(t)+7x_2(t)$ also a solution? Please prove your answer mathematically. A simple yes or no answer is not credited.【91 交大電控所 10%】