

提要 47：為何要學習高階 ODE 問題？

在工程力學上，有許多問題均與高階微分方程式有關。在土木工程之力學問題中，例如梁或板之振動問題為四階微分方程式，殼的問題為八階微分方程式等等即是。已知板之振動問題的運動方程式為：

$$\nabla^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial w}{\partial t} = p(x, y, t) \quad (1)$$

其中 $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ ； $w(x, y, t)$ 是板之垂直位移量； $\beta =$ 簡化之速度阻尼係數 (*Reduced-Velocity Damping Coefficient*)， $\beta = \frac{1}{2} \beta_0 / \sqrt{\rho K}$ ， $\rho =$ 板之單位面積密度， $\beta_0 =$ 板之阻尼係數 (*Damping Coefficient*)， $K = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ， $E =$ 板之楊氏係數 (*Young's Modulus*)， $h =$ 板之厚度， $\nu =$ 板之柏松比 (*Poisson's Ratio*)； $p(x, y, t) = p_0/K =$ 作用於板之簡化垂直應力 (*Reduced-Pressure*)， $p_0 =$ 作用於板之垂直應力。此一微分方程式即為四階之常微分方程式。

以上所舉範例為四階之偏微分方程式，若考慮問題為梁受靜態荷重後之撓度 (*Deflection*) 問題，則其基本控制方程式為：

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x) \quad (2)$$

其中 $w(x)$ 係梁之撓度 (*Deflection*)； $E =$ 梁之楊氏係數 (*Young's Modulus*)； $I =$ 梁之慣性矩 (*Moment of Inertia*)； $p(x) =$ 作用於梁之單位長度垂直外力。式(2)亦屬於四階微分方程問題。

對土木工程師之訓練而言，板之振動問題或梁之變位問題均相當重要，故有必要學習高階微分方程式的解析方法。此外，工程力學的學習在機械工程、工程科學、造船工程、航太工程、車輛工程、以及玩具的設計製造等，均相當重要。