提要 45：強制振動問題之數學模式的解

已知強制振動問題之數學模式爲：

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=f(t)} \tag{1}$$

$$\boxed{y(0)=y_0 \text{ 、 } \frac{dy(0)}{dt}=v_0} \tag{2}$$

式(1)稱爲控制方程式(*Governing Equation*)，式(2)稱爲初始條件(*Initial Condition*)。其解析過程需分爲兩個步驟，第一步是齊性解(*Homogeneous Solution*)的解析，第一步是非齊性解(*Non-homogeneous Solution*)的解析。

● 齊性解的解析

首先，需由齊性微分方程式 $m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=0$ 解出問題之齊性解。大自然的振動問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$m\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+C\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+k\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(m\lambda^2+C\lambda+k\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的齊性解 y，而我們不希望所研討出之齊性解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$m\lambda^2+C\lambda+k=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4mk}}{2m} \tag{5}$$

其後可再根據特徵根係相異根(含相異實根及相異複數根兩種情況)或重根，而得出問題之通解(*General Solution*)。若特徵根爲相異根，則不管是相異實根或相異複數根(即

$C^2-4mk\neq 0$)，通解均可表為：

$$\boxed{y_h=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}} \tag{6}$$

其中 $\lambda_1=\dfrac{-C+\sqrt{C^2-4mk}}{2m}$ 、 $\lambda_2=\dfrac{-C-\sqrt{C^2-4mk}}{2m}$ 。若所解出之特徵根為重根(即 $C^2-4mk=0$)，則問題之通解為：

$$\boxed{y_h=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_2 t}} \tag{7}$$

其中 $\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{C}{2m}$。最後再代入數學模式中之初始條件(2)，即可解出 C_1、C_2，求出滿足初始條件之特解(*Particular Solution*)。

• 非齊性解的解析

關於非齊性解 y_p 的解析，可採用待定係數法(*Undetermined Coefficient Method*)或參數變換法(*Variation of Parameters*)求解。待定係數法僅適用於常係數微分方程式且非齊性項 $r(x)$ 必須是屬於 $kx^n\left(n=0,1,2,\cdots\right)$、$ke^{\gamma x}$、$\begin{cases}k\cos\alpha x\\ k\sin\alpha x\end{cases}$、及 $\begin{cases}ke^{\gamma x}\cos\alpha x\\ ke^{\gamma x}\sin\alpha x\end{cases}$ 等四種函數情況，其使用原則包括：(A)基本原則；(B)相加的原則；(C)修正的原則。參數變換法之公式為：

$$\boxed{y_p=y_1\int\frac{rW_1}{W}dx+y_2\int\frac{rW_2}{W}dx} \tag{8}$$

其中 $W_1=\begin{vmatrix}0 & y_2\\ 1 & \dfrac{dy_2}{dx}\end{vmatrix}$ 、$W_2=\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ \dfrac{dy_1}{dx} & 1\end{vmatrix}$ 、$W\left(y_1,y_2\right)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx}\end{vmatrix}$ ；y_1 與 y_2 是齊性解中之基底(*Basis*)。

習題

1. 1. Express the solution of the initial value problem

$$y''-3y'+2y=\sin x^2\ ;\quad y(0)=0\ ,\quad y'(0)=3\ ,$$

in terms of integrals of the form $\int_0^x e^{-at}\sin t^2 dt$.【88 交大電信所 10%】