提要 43：認識參數變換法

幾乎所有待定係數法(*Undetermined Coefficient Method*)解不出的滿足非齊性項(*Non-homogeneous Term*)之特解(*Particular Solution*)，參數變換法(*Variation of Parameters*)都可以解得出來。茲考慮廣義之二階非齊性常微分方程式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{1}$$

其中 $p(x)$ 與 $q(x)$ 稱為微分方程式之係數(*Coefficient*)；$r(x)$ 稱為微分方程式之非齊性項。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式的通解(*General Solution*) y 會包含兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 研討出，通常只需瞭解兩種類型的二階齊性微分方程式的解法即可，一種類型是係數為常數之常係數齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$，另一種類型是 *Euler-Cauchy* 微分方程式 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0$。之前已介紹過這兩種類型齊性微分方程式的解法，今再作表整理說明如下：

表一　常係數齊性微分方程式與 *Euler-Cauchy* 方程式之解析方法的比較

常係數齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$	*Euler-Cauchy* 方程式 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0$
考慮 $y=e^{\lambda x}$	考慮 $y=x^m$
特徵方程式為： $\lambda^2+a\lambda+b=0$	特徵方程式為： $m^2+(a-1)m+b=0$
特徵根為： $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ $\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$	特徵根為： $m_1=\frac{-(a-1)+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$ $m_2=\frac{-(a-1)-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$
齊性解為： $y_h=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ (λ_1 與 λ_2 為相異根) $y_h=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2xe^{\lambda_1 x}$ (λ_1 與 λ_2 為重根)	齊性解為： $y_h=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}$ (m_1 與 m_2 為相異根) $y_h=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_1}\ln x$ (m_1 與 m_2 為重根)

• 非齊性解的解析—參數變換法(*Variation of Parameters*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以參數變換法(*Variation of Parameters*)解析出問題的非齊性解。若 y_1 與 y_2 為齊性解 y_h 中之基底(*Basis*)，則非齊性解 y_p 需與 y_1 與 y_2 呈線性獨立(*Linear Independence*)之關係，亦即：

$$\frac{y_p}{y_1}=u(x)\text{、}\frac{y_p}{y_2}=v(x) \tag{3}$$

或

$$y_p=uy_1\text{、}y_p=vy_2 \tag{3'}$$

式(3’)亦可改寫爲：

$$y_p = uy_1 + vy_2 \tag{4}$$

只要u與v可研討出，則非齊性解y_p即可推導出。以下說明u與v之解析方式。將式(4)代回式(1)：

$$\frac{d^2(uy_1+vy_2)}{dx^2} + p\frac{d(uy_1+vy_2)}{dx} + q(uy_1+vy_2) = r \tag{5}$$

上式中之$\frac{d(uy_1+vy_2)}{dx}$可繼續化簡爲：

$$\frac{d(uy_1+vy_2)}{dx} = u\frac{dy_1}{dx} + v\frac{dy_2}{dx} + \frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2 \tag{6}$$

若考慮

$$\frac{du}{dx}y_1 + \frac{dv}{dx}y_2 = 0 \tag{7}$$

則式(6)可改寫爲：

$$\frac{d(uy_1+vy_2)}{dx} = u\frac{dy_1}{dx} + v\frac{dy_2}{dx} \tag{6’}$$

此外，式(5)中之第一項$\frac{d^2(uy_1+vy_2)}{dx^2}$可繼續改寫爲：

$$\frac{d^2(uy_1+vy_2)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(u\frac{dy_1}{dx} + v\frac{dy_2}{dx}\right) = \frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{dy_2}{dx} + u\frac{d^2y_1}{dx^2} + v\frac{d^2y_2}{dx^2} \tag{8}$$

故式(5)可改寫爲：

$$\left(\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{dy_2}{dx} + u\frac{d^2y_1}{dx^2} + v\frac{d^2y_2}{dx^2}\right) + p\left(u\frac{dy_1}{dx} + v\frac{dy_2}{dx}\right) + q(uy_1+vy_2) = r \tag{5’}$$

其中$u\left(\frac{d^2y_1}{dx^2} + p\frac{dy_1}{dx} + qy_1\right) = 0$、$v\left(\frac{d^2y_2}{dx^2} + p\frac{dy_2}{dx} + qy_2\right) = 0$，故式(5’)可再改寫爲：

$$\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dv}{dx}\frac{dy_2}{dx} = r \tag{9}$$

式(7)與式(9)中恰好含有兩個未知數 du/dx 、 dv/dx ，且這兩個方程式剛好可以解出這兩個未知數。由式(7)與式(9)知：

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{du}{dx} \\ \dfrac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r \end{Bmatrix} \tag{10}$$

利用 Cramer 法則可求出兩個未知數：

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \frac{r\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \frac{rW_1}{W(y_1, y_2)} \tag{11a}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \frac{r\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}} = \frac{rW_2}{W(y_1, y_2)} \tag{11b}$$

其中 $W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}$ 、 $W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & 1 \end{vmatrix}$ 、 $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \end{vmatrix}$ 。由式(11a)與式(11b)得知：

$$u = \int \frac{du}{dx} dx = \int \frac{rW_1}{W} dx \tag{12a}$$

$$v = \int \frac{dv}{dx} dx = \int \frac{rW_2}{W} dx \tag{12b}$$

由式(4)、式(12a)與式(12b)知，問題之非齊性解爲：

$$\boxed{y_p = y_1 \int \frac{rW_1}{W} dx + y_2 \int \frac{rW_2}{W} dx} \tag{13}$$

附註：式(13)之公式是基於式(1)之微分型態所推導出來的，而式(1)中之 y'' 項次的係數爲 1，應用公式(13)時，一定要留意式(1)中之 y'' 項次的係數是否爲 1，若不是 1，公式(13)就不能使用。此一要點，是背公式的同學常常忽略的，務須切記！

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解： $y''+y=\sec x$ 。

【解答】

- **齊性解的解析**

由齊性微分方程式 $y''+y=0$ 解析出齊性解 y_h 。令齊性解 y_h 爲：

$$y_h=e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+1\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+1=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+i)(\lambda-i)=0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=-i \text{ 、 } \lambda=i$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)爲：

$$\boxed{\begin{aligned} y_h &= C_1e^{-ix}+C_2e^{ix} \\ &= C_1(\cos x-i\sin x)+C_2(\cos x+i\sin x) \\ &= (C_1+C_2)\cos x+i(C_1-C_2)\sin x \\ &= A\cos x+B\sin x \end{aligned}}$$

其中 $A=C_1+C_2$ 、 $B=i(C_1-C_2)$ 。

- ## 非齊性解的解析

因爲非齊性項$r(x)=\sec x$，因非齊性項並非之前所介紹的四種基本函數型態，故必須採用參數變換方法求解問題之非齊性解y_p，由式(13)知，非齊性解y_p可表爲：

$$y_p = y_1\int \frac{rW_1}{W}dx + y_2\int \frac{rW_2}{W}dx$$

其中

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & \dfrac{dy_2}{dx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ 1 & \cos x\end{vmatrix}=-\sin x$$

$$W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ \dfrac{dy_1}{dx} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos x & 0 \\ -\sin x & 1\end{vmatrix}=\cos x$$

故

$$\begin{aligned} y_p &= \cos x\int \frac{\sec x(-\sin x)}{1}dx+\sin x\int \frac{\sec x\cos x}{1}dx \\ &= \cos x\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx+\sin x\int dx \\ &= \cos x\int \frac{d\cos x}{\cos x}+\sin x(x) \\ &= \cos x\ln|\cos x|+x\sin x \end{aligned}$$

因通解係齊性解y_h與非齊性解y_p的和，故問題之通解y爲：

$$\boxed{y = A\cos x+B\sin x+\cos x\ln|\cos x|+x\sin x}$$

習題

1. Solve the second order non-homogeneous ODEs by variation of parameters.
   (a) $y''-2y'+y=2x$.
   (b) $y''-y'-6y=e^{-x}$. 【93 台大環工所 20%】

2. Given that x and xe^{x} are solutions of the homogeneous equation corresponding to $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=2x^3$, $x>0$. Find the general solution by using the method of variation of parameter.【93 成大電機所、電子所、通訊所 15%】

3. Solve $y''-y=\dfrac{2e^{t}}{e^{t}+e^{-t}}$.【92 中原機械所 15%】

4. Solve $y''+4y=\tan 2x$.【91 北科化工所 15%，93 淡江化工所 20%】

5. By variation of parameter method, solve $y''+4y=\cos 2x$.【93 海洋導航所 15%】

6. Find the particular solution of the following ODE $x^2y''-3xy'+4y=x^2\ln x$, $x>0$, given that $y_1=x^2$, $y_2=x^2\ln x$ are two homogeneous solutions.【94 清大原子所 10%】

7. Find a particular solution of $y''+y'-6y=e^{-x}$ by both the method of undetermined coefficients and the method of variation of parameters.【92 台大物理所 10%】

8. Solve $y''+y=\sec x$.【90 成大機械所 15%，91 中山材料所 20%，91 暨南電子所 10%，94 台科化工所 15%】

9. Solve $y''+y=\csc x$.【90 北科通訊所 15%】

10. Solve $y''+4y=\sec x$.【90 崑山電機所 10%，93 海洋導航所 10%】

11. Solve $y''+4y=2\sec x$.【88 元智機械所 20%】

12. Solve $y''+4y=5\csc x$.【91 中山海下所 15%】

13. Solve $y''+4y=\tan 2x$.【91 北科化工所 15%】

14. Solve $y''+y=5x^3+2\tan x$.【94 中興環工所 20%】

15. Find the general solution of the equation $3y''-6y'+6y=e^{x}\sec x$.【93 台大電子所 10%】

16. Solve $y''-y=\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}$.【91 北科高分子所 15%】

17. Find the general solution of the following equation $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$.【88 北科生化所 20%】

18. Find the solution of the following equation $y''+2y'+y=4e^{-x}\ln x$.【93 元智機械所 10%】

19. Solve $y''+9y=\frac{1}{4}\csc 3x$.【93 台科電子所 7%】

20. Solve $y''-2y'+y=x^{-3}e^{x}$.【94 台科機械所 20%】

21. Solve $y''-2y'+y=\frac{e^{x}}{x}$.【91 嘉義機電所 30%】

22. Solve $4y''+8y'+5y=e^{-x}\sec\frac{x}{2}$.【87 台科高分子所 12%】

23. Solve $y''-3y'-4y=\frac{1}{x^{3}}e^{4x}\left(5x-2\right)$.【89 成大電子所 7%】

24. Solve $y''+6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{x^{2}+1}$.【90 中央光電所 15%，91 北科自動化所 20%】

25. Solve $y''-6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{x}$.【台大環工所】

26. Solve $y''-3y'+2y=\sin e^{-x}$.【89 北科光電所 10%】

27. 以參數變化法求解下列方程式之通解： $y''-2y'+y=x^{1/2}e^{x}$.【91 中山海環所 10%】

28. Express the solution of the initial value problem

$$y''-3y'+2y=\sin x^{2}\text{；}\quad y\left(0\right)=0\text{，}\quad y'\left(0\right)=3\text{，}$$

in terms of integrals of the form $\int_{0}^{x}e^{-at}\sin t^{2}dt$.【88 交大電信所 10%】

29. Find the general solution for the following differential equation $x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}+4\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x^{3}}{x}$.【93 台大電機所 15%】

30. Solve $x^{2}y''+3xy'-3y=\sqrt{x}$.【92 台科高分子所 15%】

31. Solve $x^{2}y''-3xy'+3y=2x^{4}e^{x}$.【92 中正電機所 5%，93 淡江環工所 20%，94 台大生機所 10%】

32. Find the general solution for the following equation:

$$\left(2x+4\right)^{2}y''-4\left(2x+4\right)y'+8y=4\ln\left(2x+4\right).$$【94 嘉義土木所 20%】

33. Solve the differential equation $x^2y''-4xy'+6y=2x^3+x^2$.【91 台科化工所 15%，94 中原化工所 10%】

34. Solve $\left(4x^2+4x+1\right)y''-\left(4x+2\right)y'-12y=\dfrac{3x}{x+\frac{1}{2}}$.【93 清大動機所 14%】

35. Solve $x^2y''+xy'-y=x^3$.【93 台大化工所 10%】

36. Solve $x^2y''-2y=x^2$.【93 交大物理所 10%】

37. Solve $x^2y''+3xy'+y=\dfrac{4}{x}$.【92 淡江化工所 20%】

38. Solve $x^2y''+xy'+y=\sec\left(\ln x\right)$.【93 台科化工所 15%】

39. Solve $y''-\dfrac{1}{x}y'=\left(3+x\right)xe^x$.【92 北科自動化所 20%】

40. Solve $x^2y''-4xy'+4y=x^4+x^2$.【93 師大電子所 15%】

41. Solve $\left(x+2\right)^2y''-\left(x+2\right)y'+y=3x+4$.【93 輔仁電子所 10%】

42. Solve $x^2y''-4xy'+4y=9x^2+6x+6$.【93 暨南土木所 15%】

43. Solve $\left(x^2D^2-2xD+2\right)y=x^3\cos x$.【93 中興土木所 6%】

44. Solve $x^2y''-2xy'+2y=x^3\cos x$.【91 中興環工所 10%】

45. Find the particular solution of the following equation

$$\left(x+1\right)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(x+2\right)\frac{dy}{dx}+y=e^x\left(x+1\right)^2.$$【91 成大土木所 20%】

46. Given two solutions of a non-homogeneous second order linear ordinary differential equation, can you find a particular solution of the corresponding homogeneous equation? *How about the* general solution of the homogeneous equation? Show your work step by step.【89 成大機械所 15%】

47. Solve $\left(x+2\right)y''-\left(2x+5\right)y'+2y=\left(x+1\right)e^x$.【89 中興土木所 25%】

48. Solve $xy''+2y'-xy=2e^x$.【89 中興化工所 20%】

49. Given a homogeneous solution of the following differential equation

$xy'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{\frac{3}{2}}$ as $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, find the particular solution.【91 成大土木所 15%】

50. Solve the following differential equation $x(1-x)y'' + \frac{1}{2}(x+1)y' - \frac{1}{2}y = 0$.【89 逢甲紡織所 20%】

51. 求解常微分方程式$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 6(x^2+1)^2$。【90 中山海環所 20%】

52. Solve $x(x-1)y'' - xy' + y = 0$.【90 成大機械所 10%】

53. Solve $(1-x)y'' + xy' - y = (1-x)^2$.【89 中興化工所 20%】

54. Suppose that $y_1(x)$ is a solution of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Let

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$$

(a) Is $y_2(x)$ also a solution of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$? Why or why not?

(b) Are $y_1(x)$ and $y_2(x)$ linearly dependent on any interval on which $y_1(x)$ is not zero? Why or why not? (Hint: Check the Wronskian $W(y_1, y_2)$.)【91 雲科機械所 15%】

55. Solve $2x^2y'' + x(1+4x)y' + (2x-1)y = 0$.【91 台科化工所 15%】

56. Solve $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.【88 北科光電所 10%】

57. Find the general solution of $x^2y'' - xy' + y = 6x$ for $x > 0$.【88 台科化工所 10%】

58. Solve $x^2y'' - 2xy' - 18y = x^4 - \ln x$.【87 台科電子所 10%】

59. Solve $x^2y'' - xy' = 2x^3e^x$.【87 雲科電子所 10%】

60. Solve $x^2y'' + 2xy' - 12y = \sqrt{x}$, $x > 0$.【90 台科電機所 10%】

61. Find the general solution $y(x)$ of the following equation

$$x^2y'' + xy' - y = \frac{1}{x}.$$【90 台科高分子所 14%】

62. Solve $x^2y'' + xy' + y = 4\sin(\ln x)$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.【87 台科高分子所 14%】

63. Solve $(2x-3)^2 y''+(14x-21)y'+4y=0$.【87 中原電機所 15%，90 成大水利所 10%】

64. Find the solution of a non-homogeneous Euler-Cauchy equation without boundary conditions: $x^2y''-2xy'+2y=5x^3\cos x$.【89 淡江化工、機械所 15%】

65. To evaluate the integral $y(x)=\int_1^x\int_1^t \frac{\ln z}{z^2}dzdt$, you may compute $y'(x)$ and $y''(x)$ and show that y satisfies a non-homogeneous Euler differential equation. Evaluate $y(1)$ and $y'(1)$ and solve the initial value problem for $y(x)$.【88 北科低溫冷凍所 15%】

66. Solve $x^2y''+2xy'-2y=6x$.【88 成大水利所 10%】

67. Solve $y''-\frac{4}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=x^2+1$.【91 淡江電機所 20%】

68. Solve $x^4y''+x^3y'-x^2y=1$.【91 逢甲電機所 10%】

69. Solve $4x^2y''+4xy'-y=\frac{12}{x}$, $x>0$.【91 中央電機所 15%】

70. Solve $x^2y''-5xy'+9y=12x$.【91 北科高分子所 15%】

71. Solve $x^2y''-3xy'+3y=2x^3-x^2$.【91 高科環安所 15%】

72. Solve $x^2y''-5xy'+8y=4\ln x-x^2$, $y(1)=1.5$, $y'(1)=3.5$.【91 北科環境所 25%】

73. Solve $x^2y''+2xy'-6y=x+1$, $x>0$.【91 高科營建所 10%】

74. Solve $x^2y''-4xy'+6y=-7x^4\sin x$.【90 北科自動化所 20%】

75. Solve $x^2y''+3xy'-15y=x^2e^x$.【90 中原化工所 15%】

76. Solve the non-homogeneous equation.
$x^2y''-3xy'+3y=2x^4e^x$.【89 北科化工所 20%，89 交大電子所 10%】

77. Find the general solution of the differential equation:
$x^2y''+6xy'-6y=4x+1$.【90 台科機械所 20%】

78. Solve $t^3y''+t^2y'-4ty=1$, $t\ge 0$.【91 中原化工所 10%】

79. Solve $x^2y''-4xy'+6y=36\ln x$, $y(1)=2$, $y'(1)=3$.【91 北科自動化所 20%】

80. Prove the following formula: A second order differential equation

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad \text{------------------------------- (1)}$$

with arbitrary variable functions $p(x)$, $q(x)$ and $r(x)$ that are continuous on some interval *I*. A particular solution $y_p(x)$ of (1) on *I* cab be gotten on the form

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx$$

where *W* is the Wronskian of y_1, y_2, and y_1, y_2 form a basis of the solutions of the homogeneous equation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.【87 中央電機所 10%，87 成大機械所 10%】

81. Use variation of parameters to derive the particular solution $y_p = \frac{1}{2}\int_0^x f(t)\left[e^{x-t} - e^{t-x}\right]dt$ of the equation $y'' - y = f(x)$. 【交大電信所 15%】

82. Show that the particular solution of the second order linear equation $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ can be written in the form as $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} G(x,t) f(t)\,dt$, where x_0 is a fixed reference point for evaluation of the integral and the function $G(x,t)$ is defined by $G(x,t) = \frac{1}{W(t)}\begin{vmatrix} y_1(t) & y_1(x) \\ y_2(t) & y_2(x) \end{vmatrix}$ with $W(t)$ being the Wronskian of $y_1(t)$ and $y_2(t)$, $y_1(t)$ and $y_2(t)$ are the independent solutions of associated homogeneous equation.【91 交大電信所 10%】

83. Solve $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = 1 - x$.【成大土木所】

84. Solve $xy'' + 2y - 8x^3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.【92 交大機械所 10%】

85. Solve $x^3 y'' - 4xy' + 4y = 0$.【92 淡江電機所 20%】