提要 42：以待定係數法解析二階常係數非齊性 ODE 之特解(三)

爲清楚起見，仍將二階常係數非齊性常微分方程式之通解的解析方法完整呈現，說明如下。二階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x) \tag{1}$$

其中 a 、 b 稱爲微分方程式之係數(*Coefficient*)，且爲常數； $r(x)$ 稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution*) y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p ，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ 研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，亦即需令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{5}$$

因所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況，亦即可分別考慮 $a^2 - 4b > 0$ 、 $a^2 - 4b = 0$ 及 $a^2 - 4b < 0$ 。其中相異實根與複數根可歸納爲一類，因無論是相異實根或複數根，均屬於非重根情況。若令所得出之兩個不相同的特徵根分別爲 λ_1 與 λ_2 ：

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{、} \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{6}$$

則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7}$$

即使式(6)中含有複數根，式(7)之齊性解的表達方式亦是正確的。

若是考慮重根情況，則：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \tag{8}$$

而問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x} \tag{9}$$

• 非齊性解的解析—(C)相加的原則(*Sum Rule*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。在前兩個單元已介紹過待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$ ，且 $r(x)$ 爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。在這一單元的介紹中，擬再說明相加的原則(*Sum Rule*)。相加的原則是說，當問題之非齊性項 $r(x)$ 爲表一中所示非齊性項 $r(x)$ 之和時，則所假設的非齊性解 y_p 亦爲表一中所示 y_p 之和。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_n x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1 x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases} ke^{\gamma x}\sin\alpha x \\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解：$y''+2y'-3y=4x^2+4e^{-3x}$ 。

【解答】

● 齊性解的解析

由齊性微分方程式$y''+2y'-3y=0$解析出齊性解y_h。令齊性解y_h爲：

$$y_h=e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+2\left(e^{\lambda x}\right)'-3\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即$e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+3)(\lambda-1)=0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*)λ爲：

$$\lambda=-3 \text{ 、 } \lambda=1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)爲：

$$\boxed{y_h=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}}$$

● 非齊性解的解析

因爲非齊性項$r(x)=4e^{-3x}+4x^2$，由表一知，這是表一中之第一與第二種非齊性項$r(x)$的和，因此可假設非齊性解y_p爲：

$$y_p=Ae^{-3x}+Bx^2+Cx+D$$

但是其中之自然指數所假設之函數型態已出現在齊性解 $y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^x$ 中了，故必須

引用修正的原則，修正所假設之非齊性解 y_p 爲：

$$y_p = Axe^{-3x} + Bx^2 + Cx + D$$

再代回原式：

$$\left(Axe^{-3x} + Bx^2 + Cx + D\right)'' + 2\left(Axe^{-3x} + Bx^2 + Cx + D\right)' - 3\left(Axe^{-3x} + Bx^2 + Cx + D\right) = 4e^{-3x} + 4x^2$$

上式可化簡爲：

$$A(-6+9x)e^{-3x} + 2A(1-3x)e^{-3x} - 3\left(Axe^{-3x}\right) + 2B + 2(2Bx + C) - 3\left(Bx^2 + Cx + D\right) = 4e^{-3x} + 4x^2$$

再加以整理爲：

$$-4Ae^{-3x} - 3Bx^2 + (4B - 3C)x + (2B + 2C - 3D) = 4e^{-3x}$$

比較係數知：

$$A = -1 \text{、} B = -\frac{4}{3} \text{、} C = -\frac{16}{9} \text{、} D = -\frac{56}{27}$$

即問題之非齊性解 y_p 爲：

$$\boxed{y_p = -xe^{-3x} - \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{56}{27}}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 爲：

$$\boxed{y = C_1e^{-3x} + C_2e^x - xe^{-3x} - \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{56}{27}}$$

習題

1. Solve the differential equation $y''+2y'+5y=1.25e^{0.5x}+40\cos 4x-55\sin 4x$, $y(0)=0.2$, $y'(0)=60.1$.【93 北科通訊所 20%】

2. Solve $y''+5y'+6y=3e^{-2x}+e^{3x}$.【94 台大生機所 10%】

3. Solve $y''+y=(x-1)\cos x$, $y(0)=y'(0)=1$.【94 元智電機所 15%】

4. Solve $6y''-11y'+3y=12e^{3x}+3x^2+5x$.【91 北科高分子所 12%】

5. Solve $y''+y'=4xe^{x}+3\sin x$.【90 成大工科所 6%】

6. Solve $y''+3y'-4y=10e^{x}-6.8\sin x$.【91 元智機械所 10%】

7. Solve $y''+4y=8xe^{-2x}+4x^2+2x$.【87 雲科電子所 10%】

8. 利用未設定係數法解微分方程式：$y''-6y'+9y=6x^2+2-12e^{3x}$，其特殊解 y_p 應設為那種形式較恰當？
   (a) $Ax^3+Bx^2+Cx+E+Fe^{3x}$
   (b) $Ax^2+Bx+C+Ee^{3x}$
   (c) $Ax^2+Bx+C+Exe^{3x}$
   (d) $Ax^2+Bx+C+Ex^2e^{3x}$
   (e) $Ax^2+Bx+C+Ee^{3x}+Fxe^{3x}$ 【87 台大電機所 5%】

9. $y''-4y'+4y=3t^2+5te^{2t}+t\cos t$, find a suitable form for particular solution if methos of undetermined coefficients is to be used.【90 中山海下所 10%】

10. Solve $y''+2y'=2x+5-e^{-2x}$.【91 東華材料所 10%】

11. 利用未定係數法解 $y''-2y'+y=3x^2-4e^{x}$ 時，其特解 y_p 應為：
   (a) $Ax^2+Bx+C+De^{x}$
   (b) $Ax^3+Bx^2+Cx+De^{x}$
   (c) $Ax^4+Bx^3+Cx^2+De^{x}$
   (d) $Ax^2+Bx+C+Dxe^{x}$
   (e) $Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{x}$ 【90 台大物理所 5%】

12. The differential equation $y''+9y=4+5\sinh 3x$ with initial conditions $y(0)=0$, $y'(0)=2$.
   (a) Find the harmonic solution.
   (b) Please use method of undetermined coefficient to find the particular solution. (Note: $\sinh 3x=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$)
   (c) Inserting initial conditions to find the particular solution.【91 交大土木所 20%】

13. Solve $y'' + 2y' + y = -3e^{-x} + 8x^2e^{-x} + 9$.【91 中山材料所 20%】

14. Solve $y'' - y = 4e^{-x} - 2xe^{-x} + 10\cos 2x$.【92 交大電信所 5%】

15. Solve $y'' + 4y' + 4y = 2x + 3xe^{-2x} + 6$.【90 中央環工所 30%】