提要 41：以待定係數法解析二階常係數非齊性 ODE 之特解(二)

爲清楚起見，仍將二階常係數非齊性常微分方程式之通解的解析方法完整呈現，說明如下。二階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x) \tag{1}$$

其中 a 、 b 稱爲微分方程式之係數(*Coefficient*)，且爲常數；$r(x)$ 稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution*) y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p ，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$ 研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，亦即需令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{5}$$

因所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況，亦即可分別考慮 $a^2 - 4b > 0$ 、 $a^2 - 4b = 0$ 及 $a^2 - 4b < 0$ 。其中相異實根與複數根可歸納爲同一類，因無論是相異實根或複數根，均屬於非重根情況。若令所得出之兩個不相同的特徵根分別爲 λ_1 與 λ_2 ：

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \text{、} \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \tag{6}$$

則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7}$$

即使式(6)中含有複數根，式(7)之齊性解的表達方式亦是正確的。

若是考慮重根情況，則：

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a}{2} \tag{8}$$

而問題的齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x} \tag{9}$$

• 非齊性解的解析—(B)修正的原則(*Modification Rule*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。在前一單元已介紹過待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = r(x)$ ，且 $r(x)$ 爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。在這一單元的介紹中，擬再說明修正的原則(*Modification Rule*)。修正的原則是說，**當表一中所假設的非齊性解 y_p 已出現在齊性解 y_h 時，則所假設之非齊性解 y_p 必須多乘上一個自變數 x ；若新假設之非齊性解 y_p 又已出現在齊性解 y_h 中了，則所假設之非齊性解 y_p 必須再多乘上一個自變數 x 。**這個道理很類似遇到重根問題，第二個基底(*Basis*)必須多乘上一個自變數 x 一樣。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_n x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1 x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases} ke^{\gamma x}\sin\alpha x \\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解：$y''+2y'-3y=4e^{-3x}$ 。

【解答】

• 齊性解的解析

由齊性微分方程式 $y''+2y'-3y=0$ 解析出齊性解 y_h 。令齊性解 y_h 爲：

$$y_h=e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+2\left(e^{\lambda x}\right)'-3\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之齊性解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+3)(\lambda-1)=0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=-3 \text{ 、 } \lambda=1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)爲：

$$\boxed{y_h=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}}$$

• 非齊性解的解析

因爲非齊性項 $r(x)=4e^{-3x}$ ，由表一知，可假設非齊性解 y_p 爲：

$$y_p=Ae^{-3x}$$

但是以上所假設之函數型態已出現在齊性解 $y_h=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ 中了，故必須引用修正的

原則，修正所假設之非齊性解 y_p 為：

$$y_p = Axe^{-3x}$$

再代回原式：

$$\left(Axe^{-3x}\right)'' + 2\left(Axe^{-3x}\right)' - 3\left(Axe^{-3x}\right) = 4e^{-3x}$$

上式可化簡為：

$$A(-6+9x)e^{-3x} + 2A(1-3x)e^{-3x} - 3\left(Axe^{-3x}\right) = 4e^{-3x}$$

再加以整理為：

$$-4Ae^{-3x} = 4e^{-3x}$$

比較係數知：

$$A = -1$$

即問題之非齊性解 y_p 為：

$$\boxed{y_p = -xe^{-3x}}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 為：

$$\boxed{y = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} - xe^{-3x}}$$

習題

1. Solve $y''-2y'+2y=e^x\sin x$.【91 交大機械所 10%】

2. Solve $y''-2y'+y=x^2e^x$.【94 台大電機所 10%】

3. Solve $y''-2y'+y=e^x x^{-3}$.【87 雲科電子所 10%】

4. (a) For a second-order differential equation $y''-3y'+2y=x^2\left(e^x+e^{-x}\right)$. Write down the correct form of its particular solution. Do not solve.
   (b) Do the same as in part (a) for the following equation $y''+4y=x^2\cos 2x$.【92 交大電子所 9%】

5. Solve $y''+y'-2y=e^x$.【94 高應電子所 10%】

6. Solve $y''+2y'+2y=e^{-t}\sin t+\cos 2t$.【92 清大動機所 10%】

7. Solve $y''+y=\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.【93 清大工程科所 15%】

8. Solve $y''-6y'+9y=5e^{3x}$.【94 高應光電所 20%】

9. Solve the general solution of $y''+4y'+13y=\dfrac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t$.【94 中興土木所 10%】

10. Solve $y''+4y'+13y=\dfrac{1}{3}e^{-2x}\sin 3x$.【清大電機所】

11. Solve the general solution of $y''-3y'+2y=xe^x$.【93 高應機械所 10%】

12. Solve $y''-6y'+9y=e^{3x}$.【90 台大電機所 20%】

13. Solve $y''+y=-2\sin x+4x\cos x$.【93 清大原子所 10%，94 清大微機電所 15%】

14. Solve $y''-2y'+2y=2e^t\cos t$.【93 中山材料所 15%】

15. Solve $y''-2y'+2y=2e^x\cos x$.【90 北科自動化所 20%】

16. Solve the following non-homogeneous differential equation:
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+8\frac{dy(x)}{dx}+16y(x)=x\cos(2x)$$【93 暨大研究所】

17. Solve $y''-2y'+y=e^x$.【87 中山機械所 15%】

18. Solve $y''+y=x\cos x-\cos x$.【87 元智化工所 10%】

19. Solve $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$.【88 北科高分子所 8%】

20. Find the general solution for $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+2y=e^{-x}\cos(2x+1)$.【88 清大電機所 5%】

21. Solve $y''-3y'+2y=e^x$, $y(0)=1$, $y(1)=0$.【90 台大大氣所 10%】

22. The differential equation of a free harmonic oscillator driven by an external force with the same frequency is given by $\ddot{x}+\omega^2x=F\cos\omega t$, where $\ddot{x}$ denotes d^2x/dt^2 and ω is the natural frequency of the harmonic oscillator and F is a constant. Let $x(t)=p(t)\sin\omega t$. Find the differential equation for $p(t)$. Show that $\dot{p}\sin^2\omega t=\dfrac{F}{2\omega}\sin^2\omega t+C$, where C is a constant of integration. Solve for $p(t)$. Then write down the general solution of $x(t)$.【91 台師大物理所 20%】

23. (a) $y''-3y'+2y=x^2\left(e^x+e^{-x}\right)$, write down the correct form of its particular solution, do not solve. (b) Do the same as part (a) for $y''+4y=x^2\cos 2x$.【92 交大電子所 10%】

24. Solve $y''+5y'+6y=3e^{-2x}+e^{3x}$.【90 北科化工所 20%】

25. Solve $y''-y'-2y=2e^{-x}$.【87 中央土木所 10%】

26. Solve $y''-3y'+2y=xe^{2x}+\sin x$.【87 中山環工所 25%】

27. Solve $y''-y=e^x\left(x^2-1\right)$.【87 雲科化工所 10%】

28. Solve $y''+4y'+4y=7x-3\cos(2x)+5xe^{-2x}$.【88 台大化工所 10%】

29. Solve $y''+y=\sin x+xe^x$.【91 清大微機電所 15%】

30. Solve $y''+9y=x\cos 3x$.【91 雲科電機所 10%】

31. Solve $y''+2y'+y=-3e^{-x}+8xe^{-x}+9$.【91 中山材料所 20%】

32. Solve $y''-2y'+y=e^x+x$.【91 中山材料所 20%】

33. Solve $y''+3y'-18y=9\sinh 3x$.【91 中興化工所 10%】

34. Solve $y''+2y'+y=-3e^{-x}+8xe^{-x}+2\sin x+1$.【90 雲科電機所 20%】

35. (a) Solve $\dfrac{d^2y}{dt^2}+\omega^2y=\cos(\gamma t)$, in which ω and γ are constants, $\gamma\neq\omega$ and $y(0)=y'(0)=0$.