提要 40：以待定係數法解析二階常係數非齊性 ODE 之特解(一)

二階常係數非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x) \tag{1}$$

其中a、b稱爲微分方程式之係數(*Coefficient*)，且爲常數；$r(x)$稱爲微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution* y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y=\text{ 齊性解 } y_h+\text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解y_h是由齊性微分方程式$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$研討出，之前已介紹過此一類型齊性微分方程式之解法，即令：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中λ爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回齊性微分方程式：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲$e^{\lambda x}$表所假設的解y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{5}$$

因所考慮之情況可分爲相異實根、重根與複數根等三種情況，亦即可分別考慮 $a^2-4b>0$ 、 $a^2-4b=0$ 及 $a^2-4b<0$ 。其中相異實根與複數根可歸納爲一類，因無論是相異實根或複數根，均屬於非重根情況。若令所得出之兩個不相同的特徵根分別爲 λ_1 與 λ_2 ：

$$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \text{、} \lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{6}$$

則所研討出之問題的齊性解爲：

$$y_h=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x} \tag{7}$$

即使式(6)中含有複數根，式(7)之齊性解的表達方式亦是正確的。

若是考慮重根情況，則：

$$\lambda_1=\lambda_2=-\frac{a}{2} \tag{8}$$

而問題的齊性解爲：

$$y_h=C_1e^{-\frac{a}{2}x}+C_2xe^{-\frac{a}{2}x} \tag{9}$$

• 非齊性解的解析—(A)基本原則(*Basic Rule*)

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x)$ 研討出，如標題所示，本單元旨在介紹如何以待定係數法(*Undetermined Coefficients*)解析出問題的非齊性解。待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x)$ ，且 $r(x)$ 爲如表一中所示之四種簡單的函數型態，其他各種情況則需採用參數變換法(*Variation of Parameters*)才能解出問題之非齊性解。

表一　以待定係數法解析常係數非齊性微分方程式之非齊性解 y_p 的基本原則

$r(x)$之四種簡單的函數型態	所假設之 y_p 的四種函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$	$y_p=k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0$
$r(x)=ke^{\gamma x}$	$y_p=Ce^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases}k\sin\alpha x\\ k\cos\alpha x\end{cases}$	$y_p=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x$
$r(x)=\begin{cases}ke^{\gamma x}\sin\alpha x\\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x\end{cases}$	$y_p=(A\sin\alpha x+B\cos\alpha x)e^{\gamma x}$

範例一
試解出常係數非齊性微分方程式之通解：$y''+2y'-3y=4x^2$。

【解答】

• 齊性解的解析

由齊性微分方程式$y''+2y'-3y=0$解析出齊性解y_h。令齊性解y_h為：

$$y_h = e^{\lambda x}$$

代回上式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)'' + 2\left(e^{\lambda x}\right)' - 3\left(e^{\lambda x}\right) = 0$$

上式可化簡為：

$$\left(\lambda^2 + 2\lambda - 3\right)e^{\lambda x} = 0$$

因為不希望所研討出之齊性解為零，亦即$e^{\lambda x} \neq 0$，故：

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

上式可因式分解為：

$$(\lambda+3)(\lambda-1) = 0$$

故問題之齊性解的特徵根(*Characteristic Root*)λ為：

$$\lambda = -3 \text{ 、 } \lambda = 1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之齊性解(*Homogeneous Solution*)為：

$$\boxed{y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x}}$$

• 非齊性解的解析

因爲非齊性項 $r(x)=4x^2$，由表一知，可假設非齊性解 y_p 爲：

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

再代回原式：

$$\left(ax^2+bx+c\right)'' + 2\left(ax^2+bx+c\right)' - 3\left(ax^2+bx+c\right) = 4x^2$$

上式可化簡爲：

$$(2a) + 2(2ax+b) - 3\left(ax^2+bx+c\right) = 4x^2$$

再加以整理爲：

$$-3ax^2 + (4a-3b)x + (2a+2b-3c) = 4x^2$$

比較係數知：

$$\begin{cases} -3a = 4 \\ 4a - 3b = 0 \\ 2a + 2b - 3c = 0 \end{cases}$$

故可解析出：

$$a = -\frac{4}{3} \text{、} b = -\frac{16}{9} \text{、} c = -\frac{56}{27}$$

即問題之非齊性解 y_p 爲：

$$\boxed{y_p = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{56}{27}}$$

因通解係齊性解 y_h 與非齊性解 y_p 的和，故問題之通解 y 爲：

$$\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{4}{3}x^2 - \frac{16}{9}x - \frac{56}{27}}$$

習題

1. $y''-4y'+3y=3t^2+7t-9$, $y(0)=y'(0)=0$. Solve it.【94 北科通訊所 20%】

2. $y''+2y'+2y=20\cos 2t+20\sin 2t$, $y(0)=y'(0)=0$. Find transient and steady periodic solution.【94 北科冷凍所 5%】

3. Solve $y''-2y'=e^x\sin x$.【94 北科冷凍所 10%】

4. $y''+5y'+6y=3e^{-2x}+e^{3x}$, solve y.【93 北科環境所 20%，94 台大生機所 10%】

5. Solve $y''-2y'+y=2x+2+25\sin 2x$.【93 暨南土木所 15%，93 台科電機所 15%】

6. Solve $y''+4y'+4y=4x^2-6+9e^x$.【93 海洋電機所 15%】

7. Solve $y''-2y'+y=x^2+2x$.【93 成大工程科學所 20%】

8. Solve $(D^2+4D+4)y=18\cosh x$.【93 彰師光電所 10%】

9. Solve $y''-2y'-2y=4x^2+4x$, $y(0)=0$, $y'(0)=5$.【94 交大機械所 10%】

10. $y''+4y=x^2\sin 3x$, find the general solution.【94 元智機械所 16%】

11. Solve $y''-3y'+2y=e^x\sin x$.【93 大同光電所 12%】

12. Solve $y''+3y'+2y=e^x$.【87 中央光電所 5%】

13. Solve $y''+y'=2+2x+x^2$, $y(0)=8$, $y'(0)=-1$.【93 中興化工所 10%】

14. Solve $y''-y=5\sin^2 x$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$.【93 台大機械所 15%】

15. Solve $y''+y=2\sin^2 x$, $y(0)=\dfrac{1}{3}$, $y'(0)=1$.【91 海洋機電所 5%】

16. Solve $y''+4y'=\sin 3x$.【93 台大電機所 15%】

17. Solve $y''-4y'+4y=x\cos x$.【87 交大機械所 10%，92 海洋導航所 10%】

18. Solve $y''+4y'+7y=13e^{-t}\sin(t+1)$.【92 北科光電所 10%】

19. Solve $y''-y=xe^x$.【91 台大電機所 15%】

20. Solve $y''+y=x\sin x$.【90 成大土木所，95 交大電子所 15%】

21. Solve $x'' + 5x = 4e^{-t}\cos 2t$.【95 交大光電所 5%】

22. Solve $x'' + 2x' + 2x = 2t^2 + 2$.【95 交大光電所 5%】

23. Solve $x'' + 4x' + 4x = 4$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.【95 交大光電所 5%】

24. Solve $y'' + 2y' + 2y = 3.5\sin 3x - 3\cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0.5$.【90 中山材料所 10%】

25. Solve $y'' - 2y' + 10y = 20x^2 + 2x - 8$.【87 雲科環安所 10%】

26. Solve $y'' - 2y' + 5y + 4\cos t - 8\sin t = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.【88 元智電機所 10%】

27. Solve $y'' + 4y' + 4y = 8\cos x + 6\sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.【91 暨南電機所 10%】

28. Solve $y'' + y = \cos^2 x$.【91 東華材料所 10%】

29. For each of the following problems, find, respectively, a differential equation having the given function as a general solution.
   (a) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x$
   (b) $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{x} + \dfrac{4}{5}e^{2x}$
   (c) $y(x) = x^{-2}\left[C_1\cos(3\ln x) + C_2\sin(3\ln x)\right]$ 【88 台大機械所 15%】

30. 某二階、線性、非齊次(non-homogeneous)常微分方程式，其中三個解爲 $x+1$、$x+e^x$、$x-1-e^x$，試求此微分方程式及其通解(general solution)。【90 中興土木所 15%】

31. Solve $y'' + 3y' = 28\cosh 4x$.【90 彰師電機所 10%】

32. Given the differential equation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + 2x = 20\cos 2t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Please find (a) the transient solution; and (b) the steady periodic solution.【87 交大電信所 10%】

33. Solve $y'' - 5y' + 6y = -3\sin 2x$.【91 成大製造所 10%】

34. Please find the general solution for the non-homogeneous equation $y'' + 6y' + 9y = 50e^{-x}\cos x$.【90 北科光電所 15%】

35. Solve for $y(x)$ from $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x^2\sin 2x$.【90 中山材料所 25%】

36. Consider a boundary value problem: $y'' + a^2y = b\sin ax$ subject to boundary conditions $y(0) = 0$ and $y(1) = 1$, where a and b are constants. Depending on the values of a and b, there may exist no solution, unique solution, or infinite number of solutions.
   (a) Find the condition(s) under which the problem has unique solution.

(b) Solve it when the problem has unique solution.
(c) Find the condition(s) under which the problem may have infinite number of solutions.
【90 台大電機所 15%】

37. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}-2\dfrac{dy(x)}{dx}+2y(x)=e^{-x}$, $y(0)=y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$, find $y(x)$.【91 中山光電所 20%】

38. Find the general solution of the given differential equation $y''-y'-12y=2\sinh^2 x$.【91 成大電機所 10%】

39. 以未定係數法求解下列方程式之初始值問題：$y''+4y'+y=2\cos x+3\sin x$；$y(0)=1$，$y'(0)=0$。【91 中山海環所 10%】

40. 試證 $g(x)=3\sin x+2\cos x$ 為 $y''-3y'+2y=9\sin x-7\cos x$ 之一解，並求此微分方程式之通解。【90 北科高分子所 10%】

41. 求 $y''+y'+y=x$ 之通解。【95 台科營建所 5%】

42. 試解初始值問題 $y''+2y'+y=1$，$y(0)=1$，$y'(0)=2$。【95 台科營建所 7%】