提要 39：二階非齊性 ODE 之通解

二階非齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{1}$$

其中 $p(x)$、$q(x)$ 稱為微分方程式之係數(*Coefficient*)；$r(x)$ 稱為微分方程式之非齊性項(*Non-homogeneous Term*)。這種包含非齊性項之非齊性微分方程式之通解(*General Solution*) y 會出現兩部分：齊性解(*Homogeneous Solution*) y_h 跟非齊性解(*Non-homogeneous Solution*) y_p，亦即：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p} \tag{2}$$

• 齊性解的解析

齊性解 y_h 是由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$ 研討出，之前有介紹過兩種齊性微分方程式之解法，即常係數齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$，跟 *Euler-Cauchy* 方程式 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0$ 之解析。這兩種類型的方程式之解法仍是探討二階非齊性常微分方程式之通解的重要基礎，只要引用之前所介紹的解法，即可研討出問題之通解中的齊性解。

• 非齊性解的解析

非齊性解 y_p 是由非齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$ 研討出，其解析方法分為兩類，一種是待定係數法(*Undetermined Coefficients*)，一種是參數變換法(*Variation of Parameters*)。待定係數法僅適用於常係數微分方程式 $\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x)$，且 $r(x)$ 為註解中所示之四種簡單的函數型態或其相加後的和；其他各種情況則可採用參數變換法求解問題之非齊性解。

註解：所謂的四種簡單函數型態是如以下表中所示之四種。

表一　可採用待定係數法之$r(x)$的四種簡單函數型態

$r(x)$之四種簡單的函數型態
$r(x)=kx^n$ ， $n=0,1,2,\cdots$
$r(x)=ke^{\gamma x}$
$r(x)=\begin{cases} k\sin\alpha x \\ k\cos\alpha x \end{cases}$
$r(x)=\begin{cases} ke^{\gamma x}\sin\alpha x \\ ke^{\gamma x}\cos\alpha x \end{cases}$