提要 37：線性相關與線性獨立(三)

y_1與y_2互為線性相關(*Linear Dependence*)與線性獨立(*Linear Independence*)的定義有三種，這裏介紹第三種。

• 線性相關(*Linear Dependence*)
若y_1與y_2互為線性相關，則$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=0$，反之亦然。

• 線性獨立(*Linear Independence*)
若y_1與y_2互為線性獨立，則$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}\neq 0$，反之亦然。

註：

1. $W(y_1,y_2)$稱為y_1與y_2之 *Wronskian*，這是屬於一種行列式的運算。
2. 線性相關與線性獨立的定義有三種，整理如下：

y_1與y_2互為線性相關	y_1與y_2互為線性獨立
恆等式$k_1y_1+k_2y_2=0$成立的條件是k_1與k_2不全為零。	恆等式$k_1y_1+k_2y_2=0$成立的唯一條件是k_1與k_2全為零。
$y_1/y_2=C$，C為常數	$y_1/y_2=u(x)$，$u(x)$為與變數x相關之函數
$W(y_1,y_2)=0$	$W(y_1,y_2)\neq 0$

3. 目前為止，最常被引用的線性獨立關係式為$y_1/y_2=u(x)$，其場合是在引用降階法(*Reduction of Order*)討論微分方程式之第二個解的時候。

習題

1. Which of the following sets of functions, each defined on $x \in R$, are linear dependent?
   (a) $\sin x$, $\cos x$ (b) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, $\cos 2x$ (c) $1, x, x^2$ 【93 高應電機所 15%】

2. Show that x, $\sin x$ and $\cos x$ are linear independent.【94 師大機電所 14%】

3. Find three linear independent solutions of $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$. Justify that the solutions are independent.【91 元智電機所控制組 5%】

4. $y_1 = e^x$ and $y_2 = x$. Are y_1, y_2 linearly independent?【88 交大電子所 5%】

5. Show that the quantities $1, x$, and x^2 are linearly independent.【87 成大製造所 10%】

6. 以下那一組函數是線性相依（linear independent）？
   (a) e^{2x}, e^{-2x}, $\sinh(2x)$
   (b) $\sinh(2x)$, $\cosh(2x)$, $2x$
   (c) e^x, e^{2x}, e^{3x}
   (d) x^2, x^4, $x^6 - 2x^2$
   (e) e^{3x}, e^{-3x}, e^{2x} 【88 台大電機所 5%】

7. Let $u_1(x)$ and $u_2(x)$ be two independent solutions of the differential equation $\dfrac{d^2u(x)}{dx^2} + v(x)u(x) = 0$. Show that $u_1u_2' - u_2u_1'$ is a constant, where $'$ is the symbol denotes differentiation with respect to x. Take the normalization $u_1u_2' - u_2u_1' = 1$ and $\psi = u_2/u_1$. Show that $\dfrac{\psi'''}{\psi'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\psi''}{\psi'}\right)^2 = 2v(x)$.【91 台師大物理所 20%】