提要 33：認識 Euler-Cauchy 方程式的解法(三)--複數根

Euler-Cauchy 方程式係定義爲：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1}$$

上式係變係數之齊性常微分方程式，然而只要作適當之變數變換，即可發覺其在本質上亦爲常係數之齊性常微分方程式，說明如下。首先，令：

$$x=e^z \tag{2}$$

故

$$z=\ln x \tag{3}$$

而

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x}\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dx}\dfrac{1}{x}+\dfrac{dy}{dz}\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dz}\dfrac{dz}{dx}\dfrac{1}{x}-\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x^2}=\left(\dfrac{d^2y}{dz^2}-\dfrac{dy}{dz}\right)\dfrac{1}{x^2}\end{cases}$$

故式(1)可改寫爲：

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0 \tag{4}$$

上式即爲常係數之齊性常微分方程式，其解析方法已於之前介紹過，今再簡述如下。

式(4)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(z)=\exp(\lambda z)=e^{\lambda z} \tag{5}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(5)代回式(4)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda z}\right)}{dz^2}+(a-1)\frac{d\left(e^{\lambda z}\right)}{dz}+b\left(e^{\lambda z}\right)=0$$

故

$$\left[\lambda^2+(a-1)\lambda+b\right]e^{\lambda z}=0$$

因爲$e^{\lambda z}$表所假設的解y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda z}\neq 0$，故：

$$\lambda^2+(a-1)\lambda+b=0 \tag{6}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-(a-1)\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \tag{7}$$

因所考慮之情況爲複數根，故上式中根號內之運算結果應爲$(a-1)^2-4b<0$。可令所得出之兩個特徵根分別爲λ_1與λ_2：

$$\lambda_1=\frac{-(a-1)+i\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}\text{、}\lambda_2=\frac{-(a-1)-i\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2} \tag{8}$$

故所研討出之問題的解分別爲：

$$y(z)=e^{\lambda_1 z}\text{、}y(z)=e^{\lambda_2 z} \tag{9}$$

或

$$y=\left(e^z\right)^{\lambda_1}=x^{\lambda_1}\text{、}y=\left(e^z\right)^{\lambda_2}=x^{\lambda_2} \tag{9'}$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$y(x)=C_1x^{\lambda_1}+C_2x^{\lambda_2} \tag{10}$$

式(10)稱爲問題之通解(*General Solution*)。

若考慮$\alpha=-\dfrac{a-1}{2}$、$\beta=\dfrac{\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}$，並引用尤拉公式(*Euler Formula*)：

$$e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x \tag{11}$$

則式(10)可進一步改寫爲：

$$y(x)=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta} \tag{10'}$$

亦即：

$$
\begin{aligned}
y(x) &= x^{\alpha}\left(C_1 x^{i\beta} + C_2 x^{-i\beta}\right) \\
&= x^{\alpha}\left[C_1 \exp\left(\ln x^{i\beta}\right) + C_2 \exp\left(\ln x^{-i\beta}\right)\right] \\
&= x^{\alpha}\left[C_1 \exp(i\beta \ln x) + C_2 \exp(-i\beta \ln x)\right] \\
&= x^{\alpha}\left\{C_1[\cos(\beta \ln x) + i\sin(\beta \ln x)] + C_2[\cos(\beta \ln x) - i\sin(\beta \ln x)]\right\} \\
&= x^{\alpha}\left[(C_1 + C_2)\cos(\beta \ln x) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta \ln x)\right]
\end{aligned}
$$

故

$$\boxed{y = x^{\alpha}\left[A\cos(\beta \ln x) + B\sin(\beta \ln x)\right]} \tag{12}$$

其中 $A = C_1 + C_2$ 、 $B = i(C_1 - C_2)$ 。

另解

式(1)之解析，亦可直接令：

$$y = x^m \tag{13}$$

再代回式(1)，則

$$x^2 \frac{d^2(x^m)}{dx^2} + ax\frac{d(x^m)}{dx} + b(x^m) = 0$$

故

$$x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] + ax\left(mx^{m-1}\right) + b(x^m) = 0$$

上式可進一步改寫爲：

$$[m(m-1) + am + b]x^m = 0 \tag{14}$$

因爲 $y = x^m \neq 0$ ，所以

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{15}$$

故

$$m_1 = \frac{-(a-1) + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} 、 m_2 = \frac{-(a-1) - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{16}$$

故 $y = x^{m_1}$ 與 $y = x^{m_2}$ 均爲問題之解，由重疊原理知，問題之通解可表爲：

$$y(x)=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2} \tag{17}$$

因考慮複數根，即$(a-1)^2-4b<0$，若假設$\alpha=-\dfrac{a-1}{2}$、$\beta=\dfrac{\sqrt{4b-(a-1)^2}}{2}$，則：

$$m_1=\alpha+i\beta \text{ 、 } m_2=\alpha-i\beta \tag{18}$$

故式(17)亦可表為：

$$\begin{aligned}
y(x)&=C_1x^{\alpha+i\beta}+C_2x^{\alpha-i\beta}\\
&=x^{\alpha}\left(C_1x^{i\beta}+C_2x^{-i\beta}\right)\\
&=x^{\alpha}\left[C_1\exp\left(\ln x^{i\beta}\right)+C_2\exp\left(\ln x^{-i\beta}\right)\right]\\
&=x^{\alpha}\left[C_1\exp(i\beta\ln x)+C_2\exp(-i\beta\ln x)\right]\\
&=x^{\alpha}\left\{C_1\left[\cos(\beta\ln x)+i\sin(\beta\ln x)\right]+C_2\left[\cos(\beta\ln x)-i\sin(\beta\ln x)\right]\right\}\\
&=x^{\alpha}\left[(C_1+C_2)\cos(\beta\ln x)+i(C_1-C_2)\sin(\beta\ln x)\right]
\end{aligned}$$

故

$$\boxed{y=x^{\alpha}\left[A\cos(\beta\ln x)+B\sin(\beta\ln x)\right]} \tag{19}$$

其中$A=C_1+C_2$、$B=i(C_1-C_2)$。

附註：$(x^m)'=mx^{m-1}$，$(x^m)''=m(m-1)x^{m-2}$。

範例一
試解出 Euler-Cauchy 方程式之解：$x^2 y'' + xy' + y = 0$ 。

【解答】

令 $y(x) = x^m$ ，代回原式，則

$$x^2 \left(x^m\right)'' + x\left(x^m\right)' + \left(x^m\right) = 0$$

上式可化簡爲：

$$[m(m-1) + m + 1]x^m = 0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $x^m \neq 0$ ，故：

$$m^2 + 1 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(m+i)(m-i) = 0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) m 爲：

$$\lambda = -i \text{ 、 } \lambda = i$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 x^{-i} + C_2 x^i \\ &= C_1 \exp\left(\ln x^{-i}\right) + C_2 \exp\left(\ln x^i\right) \\ &= C_1 \exp(-i \ln x) + C_2 \exp(i \ln x) \\ &= C_1[\cos(\ln x) - i\sin(\ln x)] + C_2[\cos(\ln x) + i\sin(\ln x)] \\ &= (C_1 + C_2)\cos(\ln x) + i(C_1 - C_2)\sin(\ln x) \\ &= A\cos(\ln x) + B\sin(\ln x) \end{aligned}$$

習題

1. Please solve the following initial value problem.
   $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$ with $y(1) = 2,\ y'(1) = -1$ and $x > 0$.【95 暨大研究所】

2. Solve $(3x-4)^2 y'' + 3(3x-4)y' + 36y = 0$.【92 雲科電機所 15%】

3. Solve $\left(x^2+2x+1\right)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (5x+5)\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$.【91 北科通訊所 15%】