提要 32：認識 Euler-Cauchy 方程式的解法(二)--重根

Euler-Cauchy 方程式係定義爲：

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+ax\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1}$$

上式係變係數之齊性常微分方程式，然而只要作適當之變數變換，即可發覺其在本質上亦爲常係數之齊性常微分方程式，說明如下。首先，令：

$$x=e^z \tag{2}$$

故

$$z=\ln x \tag{3}$$

而

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x}\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dx}\dfrac{1}{x}+\dfrac{dy}{dz}\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dz}\dfrac{dz}{dx}\dfrac{1}{x}-\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x^2}=\left(\dfrac{d^2y}{dz^2}-\dfrac{dy}{dz}\right)\dfrac{1}{x^2}\end{cases}$$

故式(1)可改寫爲：

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a-1)\frac{dy}{dz}+by=0 \tag{4}$$

上式即爲常係數之齊性常微分方程式，其解析方法已於之前介紹過，今再簡述如下。

式(4)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(z)=\exp(\lambda z)=e^{\lambda z} \tag{5}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(5)代回式(4)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda z}\right)}{dz^2}+(a-1)\frac{d\left(e^{\lambda z}\right)}{dz}+b\left(e^{\lambda z}\right)=0$$

故

$$\left[\lambda^2+(a-1)\lambda+b\right]e^{\lambda z}=0$$

因爲$e^{\lambda z}$表所假設的解y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda z} \neq 0$，故：

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \tag{6}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{7}$$

因所考慮之情況爲重根，故上式中根號內之運算結果應爲$(a-1)^2 - 4b = 0$。可令所得出之兩個相同之特徵根分別爲λ_1與λ_2：

$$\lambda_1 = -\frac{a-1}{2}\text{、}\lambda_2 = -\frac{a-1}{2} \tag{8}$$

故所研討出問題之通解的第一個基底(*Basis*)爲：

$$y_1(x) = x^{-(a-1)/2} \tag{9}$$

問題之第二個基底(*Basis*) y_2 可利用降階法(*Reduction of Order*)研討出來。因y_1與y_2係呈線性獨立(*Linear Independent*)關係，故

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \qquad \backslash \tag{10}$$

即$y_2 = uy_1$，再將y_2代回原式(1)，

$$x^2\frac{d^2(uy_1)}{dx^2} + ax\frac{d(uy_1)}{dx} + b(uy_1) = 0$$

故

$$x^2\left(u\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2}y_1\right) + ax\left(u\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}y_1\right) + b(uy_1) = 0$$

再整理爲：

$$u\left(x^2\frac{d^2y_1}{dx^2} + ax\frac{dy_1}{dx} + by_1\right) + \frac{du}{dx}\left(2x^2\frac{dy_1}{dx} + axy_1\right) + x^2\frac{d^2u}{dx^2}y_1 = 0 \tag{11}$$

因 y_1 爲原方程式之解，所以上式中之第一個括弧 $x^2\dfrac{d^2y_1}{dx^2}+ax\dfrac{dy_1}{dx}+by_1=0$；另外，上式中之第二個括弧可調整爲：

$$2x^2\frac{dy_1}{dx}+axy_1=2x^2\frac{dx^{-\frac{a-1}{2}}}{dx}+axx^{-\frac{a-1}{2}}=2x^2\frac{-(a-1)}{2}x^{-\frac{a-1}{2}-1}+axx^{-\frac{a-1}{2}}=xx^{-\frac{a-1}{2}}=x^{\frac{-a+3}{2}}$$

所以式(11)可改寫爲：

$$\frac{du}{dx}x^{\frac{-a+3}{2}}+x^2\frac{d^2u}{dx^2}x^{\frac{-a+1}{2}}=0$$

或

$$\frac{du}{dx}+x\frac{d^2u}{dx^2}=0 \tag{12}$$

令

$$\frac{du}{dx}=U \tag{13}$$

則式(12)可改寫爲：

$$U+x\frac{dU}{dx}=0 \tag{14}$$

式(14)可調整爲：

$$-\frac{1}{x}=\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$$

然後再對 x 作積分：

$$-\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}dx$$

可知：

$$U=\frac{1}{x} \tag{15}$$

亦即：

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x} \tag{15'}$$

上式再對 x 作積分：

$$\int \frac{du}{dx}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

即可求出：

$$u = \ln x \tag{16}$$

由式(10)與式(16)即可求出重根問題之第二個基底(*Basis*)：

$$\boxed{y_2 = y_1 \ln x} \tag{17}$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之通解(*General Solution*)可以疊加方式加以表示：

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{18}$$

其中 $y_1 = x^{-(a-1)/2}$ 、 $y_2 = y_1 \ln x$ 。

另解

式(1)之解析，亦可直接令：

$$y = x^m \tag{19}$$

再代回式(1)，則

$$x^2 \frac{d^2(x^m)}{dx^2} + ax\frac{d(x^m)}{dx} + b(x^m) = 0$$

故

$$x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] + ax\left(mx^{m-1}\right) + b\left(x^m\right) = 0$$

上式可進一步改寫爲：

$$\left[m(m-1) + am + b\right]x^m = 0 \tag{20}$$

因爲 $y = x^m \neq 0$ ，所以

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{21}$$

故

$$m_1 = \frac{-(a-1)+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \text{、} m_2 = \frac{-(a-1)-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \tag{22}$$

因考慮重根，即 $(a-1)^2-4b=0$ ，故 $m_1 = m_2 = -(a-1)/2$ ，而 $y_1 = x^{m_1}$ ，由式(17)知 $y_2 = x^{m_1}\ln x$ 。再引用重疊原理，故問題之通解可表為：

$$\boxed{y(x) = C_1 x^{-(a-1)/2} + C_2 x^{-(a-1)/2}\ln x} \tag{23}$$

附註：$\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$ ，$\left(x^m\right)'' = m(m-1)x^{m-2}$ 。

範例一
試解出 Euler-Cauchy 方程式之解： $x^2y''+3xy'+y=0$ 。

【解答】

令 $y(x)=x^m$ ，代回原式，則

$$x^2\left(x^m\right)''+3x\left(x^m\right)'+\left(x^m\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$[m(m-1)+3m+1]x^m=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $x^m\neq 0$ ，故：

$$m^2+2m+1=0$$

上式可因式分解爲：

$$(m+1)^2=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) m 爲重根：

$$\lambda=-1 \text{、} \lambda=-1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1x^{-1}+C_2x^{-1}\ln x}$$

習題

1. Solve $(x+1)^2 y'' - (x+1)y' + y = 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.【93 成大光電所 6%】

2. Find a basis of solution of the differential equation. (Show the details of your work.)
$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0$$【91 中央機械所 8%】

3. Solve $4y'' + 4(e^x - 1)y' + e^{2x} y = 0$. Note: Let $t = \frac{1}{2}x$.【91 台科電子所 15%】

4. 試解$(x^2+1)y'' + 4xy' + 2y = 0$之通解（general solution）。【91 台科營建所 20%】

5. Solve $y'' + 2xy' + (x^2+2)y = 0$.【清大化工所 5%】

6. Solve $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $y(1)=2$, $y'(1)=8$.【91 台大物理所 20%】

7. Solve $y'' + 2(x+1)y' + (x^2+2x+2)y = 0$.【交大電機所】

8. Solve $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$.【91 淡江化工所 20%】