提要 31：認識 Euler-Cauchy 方程式的解法(一)--相異實根

Euler-Cauchy 方程式係定義爲：

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{1}$$

上式係變係數之齊性常微分方程式，然而只要作適當之變數變換，即可發覺其在本質上亦爲常係數之齊性常微分方程式，說明如下。首先，令：

$$x = e^z \tag{2}$$

故

$$z = \ln x \tag{3}$$

而

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dx}\dfrac{1}{x} + \dfrac{dy}{dz}\dfrac{d\left(\dfrac{1}{x}\right)}{dx} = \dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dz}\right)}{dz}\dfrac{dz}{dx}\dfrac{1}{x} - \dfrac{dy}{dz}\dfrac{1}{x^2} = \left(\dfrac{d^2y}{dz^2} - \dfrac{dy}{dz}\right)\dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

故式(1)可改寫爲：

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (a-1)\frac{dy}{dz} + by = 0 \tag{4}$$

上式即爲常係數之齊性常微分方程式，其解析方法已於之前介紹過，今再簡述如下。

式(4)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(z) = \exp(\lambda z) = e^{\lambda z} \tag{5}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(5)代回式(4)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda z}\right)}{dz^2} + (a-1)\frac{d\left(e^{\lambda z}\right)}{dz} + b\left(e^{\lambda z}\right) = 0$$

故

$$\left[\lambda^2 + (a-1)\lambda + b\right] e^{\lambda z} = 0$$

因爲$e^{\lambda z}$表所假設的解y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即$e^{\lambda z} \neq 0$，故：

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \tag{6}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda = \frac{-(a-1) \pm \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{7}$$

因所考慮之情況爲相異實根，故上式中根號內之運算結果應爲$(a-1)^2 - 4b > 0$。可令所得出之兩個特徵根分別爲λ_1與λ_2：

$$\lambda_1 = \frac{-(a-1) + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \text{、} \lambda_2 = \frac{-(a-1) - \sqrt{(a-1)^2 - 4b}}{2} \tag{8}$$

故所研討出之問題的解分別爲：

$$y(z) = e^{\lambda_1 z} \text{、} y(z) = e^{\lambda_2 z} \tag{9}$$

或

$$y = \left(e^z\right)^{\lambda_1} = x^{\lambda_1} \text{、} y = \left(e^z\right)^{\lambda_2} = x^{\lambda_2} \tag{9'}$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} \tag{10}$$

式(10)稱爲問題之通解(*General Solution*)。

式(1)之解析，亦可直接令：

$$y = x^m \tag{11}$$

再代回式(1)，則

$$x^2 \frac{d^2\left(x^m\right)}{dx^2} + ax\frac{d\left(x^m\right)}{dx} + b\left(x^m\right) = 0$$

故

$$x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] + ax\left(mx^{m-1}\right) + b\left(x^m\right) = 0$$

上式可進一步改寫爲：

$$\left[m(m-1)+am+b\right]x^m=0 \tag{12}$$

因爲 $y=x^m\neq 0$ ，所以

$$m^2+(a-1)m+b=0 \tag{13}$$

故

$$m_1=\frac{-(a-1)+\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}\text{ 、 }m_2=\frac{-(a-1)-\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2} \tag{14}$$

因考慮相異實根，即 $(a-1)^2-4b>0$，故 $y=x^{m_1}$ 與 $y=x^{m_2}$ 均爲問題之解，由重疊原理知，問題之通解可表爲：

$$\boxed{y(x)=C_1x^{m_1}+C_2x^{m_2}} \tag{15}$$

式(15)即式(10)之另一種表達方式。

附註：$\left(x^m\right)'=mx^{m-1}$ ，$\left(x^m\right)''=m(m-1)x^{m-2}$ 。

範例一
試解出 Euler-Cauchy 方程式之解：$x^2y''+xy'-y=0$。

【解答】

令 $y(x)=x^m$，代回原式，則

$$x^2\left(x^m\right)''+x\left(x^m\right)'-\left(x^m\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$[m(m-1)+m-1]x^m=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $x^m\neq 0$，故：

$$m^2-1=0$$

上式可因式分解爲：

$$(m+1)(m-1)=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) m 爲：

$$\lambda=-1 \text{、} \lambda=1$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1x^{-1}+C_2x}$$

習題

1. Solve the following non-homogeneous differential equation:

$$x^2\frac{d^2y(x)}{dx^2}-5x\frac{dy(x)}{dx}+8y(x)=x\cos x$$ 【93 暨大研究所】

2. For the non-homogeneous equation:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-6x\frac{dy}{dx}+12y=16\ln(x)$$

Please find

(a) the non-homogeneous general solution y_h and

(b) the non-homogeneous particular solution y_p. 【94 暨大研究所】

3. Solve $(x+1)^2y''-3(x+1)y'+2y=0$, $y(0)=0$, $y'(1)=2$.【93 成大土木所 20%】

4. Solve $x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$.【91 淡江化工所 20%】

5. $y_1(x)=x^{-1}$為下列微分方程式其中一解

$$2x^2y''+3xy'-y=0\text{ ， }x>0$$

請求得第二個線性獨立解。【89 交大土木所 25%】

6. 若 $y''+\left(\frac{2}{x}-2\right)y'=\left(\frac{2}{x}-1\right)y$ ， $x\neq 0$ ，試問 $y(x)=?$【95 中央土木所 20%】

7. Solve the following differential equation $(1+x)^2y''-2y=0$.【89 成大土木所】