提要 30：自由振動問題的數學模式之解

已知自由振動問題之數學模式為：

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=0 \tag{1}$$

$$y(0)=y_0 \text{、} \frac{dy(0)}{dt}=v_0 \tag{2}$$

式(1)稱為控制方程式(*Governing Equation*)，式(2)稱為初始條件(*Initial Condition*)。其解析過程說明如下。首先，大自然的振動問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數為自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解為：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{3}$$

其中 λ 為待解之未知數，稱為特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(3)代回式(1)：

$$m\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+C\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+k\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(m\lambda^2+C\lambda+k\right)e^{\lambda x}=0$$

因為 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解為零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$m\lambda^2+C\lambda+k=0 \tag{4}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱為特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-C\pm\sqrt{C^2-4mk}}{2m} \tag{5}$$

其後可再根據特徵根係相異根(含相異實根及相異複數根兩種情況)或重根，而得出問題之通解(*General Solution*)。若特徵根為相異根，則不管是相異實根或相異複數根(即 $C^2-4mk\neq 0$)，通解均可表為：

$$\boxed{y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}} \tag{6}$$

其中 $\lambda_1=\dfrac{-C+\sqrt{C^2-4mk}}{2m}$ 、 $\lambda_2=\dfrac{-C-\sqrt{C^2-4mk}}{2m}$ 。若所解出之特徵根為重根(即 $C^2-4mk=0$)，則問題之通解為：

$$\boxed{y(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2te^{\lambda_2 t}} \tag{7}$$

其中$\lambda_1=\lambda_2=-\dfrac{C}{2m}$。最後再代入數學模式中之初始條件(2)，即可解出$C_1$、$C_2$，求出滿足初始條件之特解(*Particular Solution*)。

習題

1. Solve the initial value problem $y''+by'+10y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Given (a) b = 7 (b) b = 6.【91 中山通訊所 20%】

2. 解初值問題 $4y''+4y'+y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=1$.【90 中央光電所 15%】

3. Solve $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.【87 清大電機所 5%】

4. Solve $y''+y'-2y=0$.【88 中山環工所 10%】