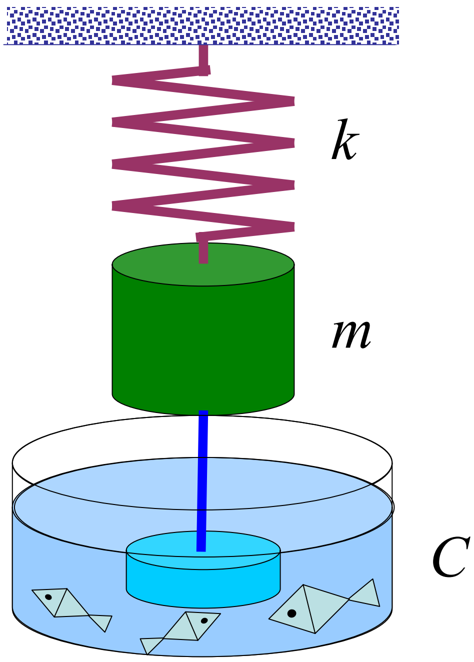
提要 29：如何建立自由振動問題的數學模式？

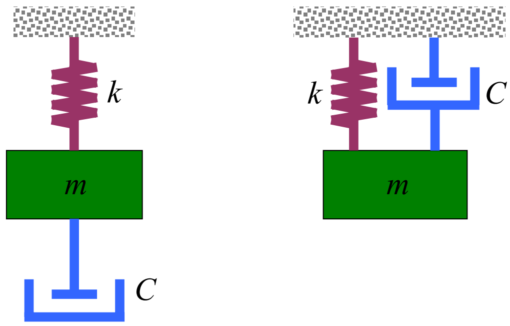
首先再介紹一次什麼是數學模式(*Mathematical Model*)。所謂的數學模式係指一組模擬實際問題的控制方程式(*Governing Equation*)、邊界條件(*Boundary Condition*)及初始條件(*Initial Condition*)等，其中的控制方程式係與問題主要相關之自然律的化身，工程分析時，能否掌握正確相關之主要自然律相當重要；另外，還需合理描述所分析問題的時空條件限制，其中與時間相關的條件稱為初始條件，與空間相關的條件稱為邊界條件。

所謂的自由振動(*Free Vibration*)，係指不受外力作用的振動，如圖一所示：



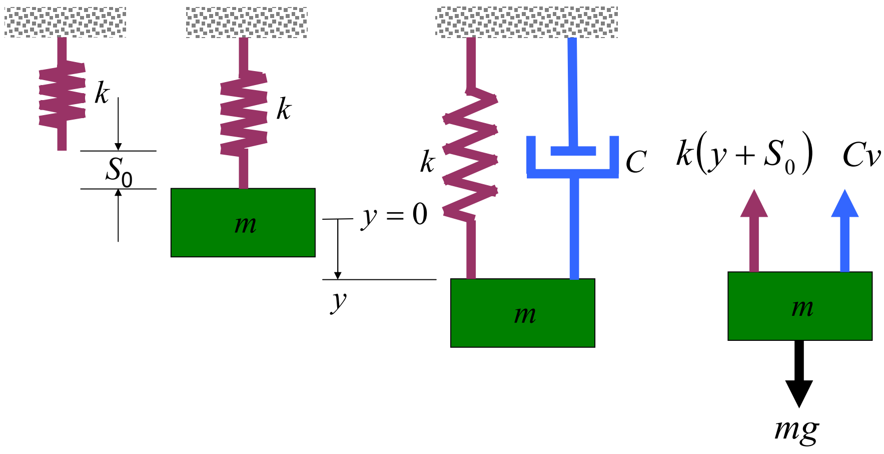
圖一　自由振動問題示意圖

其中質量為 m 的物體，其上聯結一個彈簧，下方聯結一個阻尼器。彈簧因伸長縮短所引起的內力與位移的關係若考慮為線彈性關係，則彈簧之內力與伸長量成正比，其比例常數為彈簧的彈性常數(*Spring Constant*)k。通常置於流體中之圓盤所產生的阻力係與聯結於圓盤上之物體的運動速度成正比，其比例常數稱為阻尼係數(*Damping Coefficient*)C。圖一常簡化為如圖二之型式：



圖二　簡化之質點-彈簧-阻尼系統

再將質量爲 m 之物體取自由體圖(*Free Body Diagram*)，並以牛頓第二運動定律(*Newton's Second Law*)分析其受力後之運動行爲，如下圖所示。



圖三　(a)彈簧未伸長；(b)彈簧產生靜態伸長量S_0；(c)彈簧產生動態伸長量 y；(d)以牛頓第二運動定律分析質量爲 m 之物體的運動行爲

由圖三(d)得知，其所產生之向下合力大小爲 $mg-k(y+S_0)-Cv$，由牛頓第二運動定律 $\sum F = ma$ 知：

$$mg - k(S_0 + y) - Cv = ma \tag{1}$$

其中物體的運動速度 v 爲物體位移量 $(S_0 + y)$ 對時間變數 t 的一次微分，亦即：

$$v=\frac{d(S_0+y)}{dt}=\frac{dS_0}{dt}+\frac{dy}{dt}=0+\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dt}$$

而物體的運動加速度a爲物體位移量(S_0+y)對時間變數t的兩次微分，亦即：

$$a=\frac{d^2(S_0+y)}{dt^2}=\frac{d^2S_0}{dt^2}+\frac{d^2y}{dt^2}=0+\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

另外，由圖三(b)之靜力平衡知，物體處於靜態伸長時，物體所受重力mg係與彈簧的拉力kS_0相同，即$mg=kS_0$。基於此，故式(1)亦可表爲：

$$-ky-C\frac{dy}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{2}$$

或

$$\boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+ky=0} \tag{3}$$

上式即爲常見之自由振動問題的控制方程式，其本質上是牛頓第二運動定律的化身。

以上之研討方式僅與考慮物體之振動與時間變數t有關，實際上物體之振動亦與其空間之條件因素密切相關。例如若考慮振動之物體爲房子，則房子是蓋在山坡地上、平地上、沙地上或岩盤上等，其因振動所引起損壞程度是完全不一樣的，這就說明了空間條件因素也很重要。爲簡化問題起見，本單元暫不考慮空間條件因素的影響。

因只考慮時間之條件因素的影響，且微分方程式(3)爲兩次微分，其通解中會包含兩個未知常數，故數學模式中常會給予兩種與時間有關之條件，亦即物體之初始位置(*Initial Position*) y_0和初始速度(*Initial Velocity*) v_0，因此問題之初始條件爲：

$$\boxed{y(0)=y_0\text{ 、 }\frac{dy(0)}{dt}=v_0} \tag{4}$$

式(3)與式(4)即構成自由振動問題之數學模式。