

提要 26：認識微分運算子

微分運算子(Differential Operator)係微分運算或其組合，其所使用的符號並無規定，其目的為盡量將繁複的微分式以簡單的型式加以表示，例如二階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (1)$$

其中 a 、 b 均為常數。若將上式中之微分符號 $\frac{d}{dx}$ 假設為 D ，則 D 就是最簡單的微分運算子，亦即 $D = \frac{d}{dx}$ ，而 $D^2 = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}$ 、 $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ ，則可將式(1)化簡為：

$$D^2y + aDy + by = 0 \quad (1')$$

上式可進一步改寫為：

$$(D^2 + aD + b)y = 0 \quad (2)$$

為將方程式盡量加以簡化，可把握相同的原則，令符號 $L = D^2 + aD + b$ ，符號 L 亦稱為微分運算子。基於此，式(1)可再改寫為：

$$L(y) = 0 \quad (3)$$

上式即使不加小括弧或改為中括弧亦可。本此原則，讀者可以任意使用自己喜歡的符號，定義其為包含任意型式微分運算之微分運算子。

附註：在以上之說明中，係使用常見之符號為微分運算子，其中 $D = \frac{d}{dx}$ 、 $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ 、

$$D^n = \frac{d^n}{dx^n}，而 L = D^2 + aD + b。$$

習題

1. Find a minimal order operator L to annihilate y , i.e., $Ly = 0$:

$$y = \cos 2x + x^3 e^{7x} + x + 1 + \sin 4x + \sin 9x. \quad \text{【88 成大造船所 13%】}$$