提要 25：二階常係數齊性 ODE 的解法(三)--複數根

複數根時之通解的解法與相異實根情況的觀念完全一樣，之所以會分為兩部分加以說明，主要是相異複數根時之通解可以利用「尤拉公式(*Euler Formula*)」加以化簡，其詳細情況說明如後。

二階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1}$$

其中 a、b 均為常數。此一類型之微分方程式，在工程力學上係與自由振動(*Free Vibration*)問題有關，在電學問題上係與電流問題有關。

式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數為自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解為：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 為待解之未知數，稱為特徵根(*Characteristic Root*)。將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因為 $e^{\lambda x}$ 代表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解為零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{3}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱為特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{4}$$

因所考慮之情況為複數根，故上式中根號內之運算結果應為 $a^2-4b<0$。可令所得出之兩個特徵根分別為 λ_1 與 λ_2：

$$\lambda_1=\frac{-a+i\sqrt{a^2-4b}}{2}\text{、}\lambda_2=\frac{-a-i\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{5}$$

故所研討出之問題的解分別為：

$$y(x)=e^{\lambda_1 x} \text{ 、 } y(x)=e^{\lambda_2 x} \tag{6}$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$y(x)=C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x} \tag{7}$$

式(7)稱爲問題之通解(*General Solution*)。

至此爲止，其解析過程與相異實根完全相同，即使沒有再往下化簡，也不算錯。但由式(5)得知，問題之特徵根包含複數，若考慮 $\alpha=-a/2$ 、 $\beta=-\sqrt{a^2-4b}/2$ ，則 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 、 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ ，故問題之通解爲：

$$y(x)=C_1 e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \tag{7'}$$

上式可進一步化簡爲：

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x}+C_2 e^{-i\beta x}\right) \tag{7''}$$

利用尤拉公式(*Euler Formula*) $e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm i\sin\beta x$ ，式(7'')可進一步改寫爲：

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[C_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)\right]$$

因此

$$y(x)=e^{\alpha x}\left[(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x\right]$$

令 $C_1+C_2=A$ 、 $i(C_1-C_2)=B$ ，則可將通解進一步改寫爲：

$$\boxed{y(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)} \tag{8}$$

範例一
試解出初始值問題之解： $y''+2y'+5y=0$ ， $y(0)=1$ 、 $y'(0)=1$ 。

【解答】

令 $y(x)=e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+2\left(e^{\lambda x}\right)'+5\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+2\lambda+5=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(5)}}{2}=-1\pm 2i$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1e^{(-1+2i)x}+C_2e^{(-1-2i)x}}$$

上式已是問題之解，即使沒有進一步加以化簡，也不算有錯。若擬進一步加以化簡，則可利用尤拉公式將問題之解進一步化簡爲：

$$\begin{aligned}
y(x)&=e^{-x}\left(C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}\right)\\
&=e^{-x}\left[C_1(\cos 2x+i\sin 2x)+C_2(\cos 2x-i\sin 2x)\right]\\
&=e^{-x}\left[(C_1+C_2)\cos 2x+i(C_1-C_2)\sin 2x\right]\\
&=e^{-x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)
\end{aligned}$$

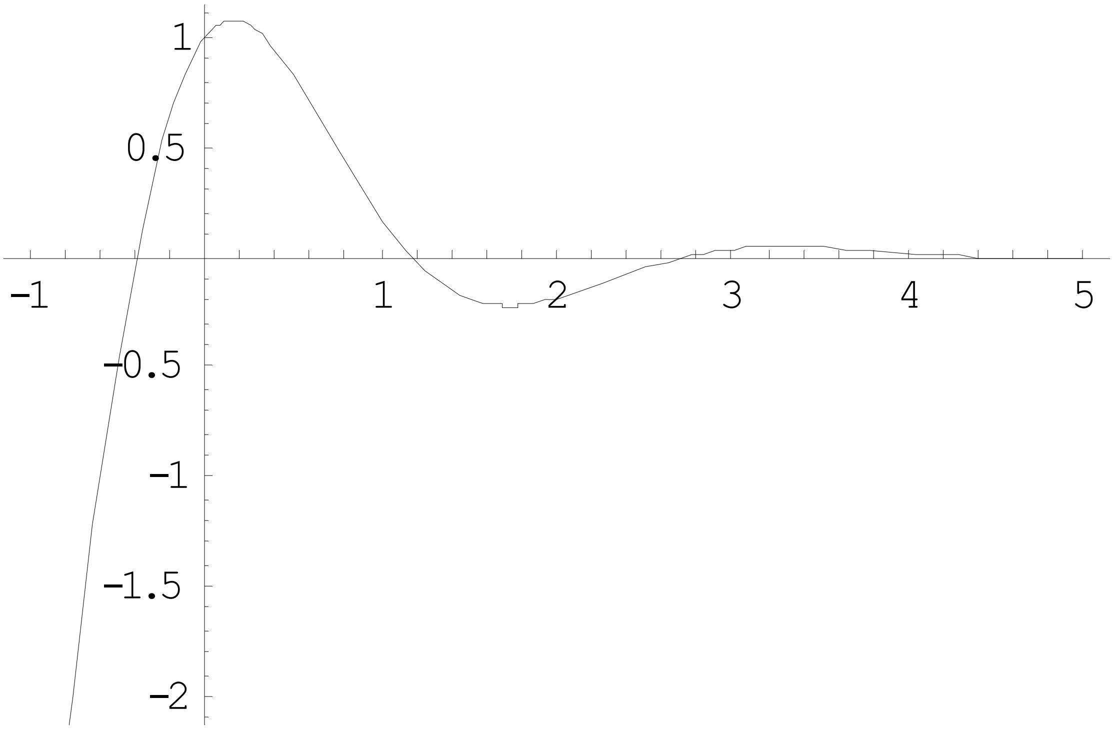
其中 $A=C_1+C_2$ 、 $B=i(C_1-C_2)$ 。再將初始條件代入通解中，即可求出 C_1 、 C_2 ：

$$\begin{cases}1=e^{-0}\left(A\cos 0+B\sin 0\right)=A\\ 1=-e^{-0}\left(A\cos 0+B\sin 0\right)+e^{-0}\left(-2A\sin 0+2B\cos 0\right)=-A+2B\end{cases}$$

可解出 $A=1$ 、 $B=1$ 。因此，滿足問題之初始條件的**特解(*Particular Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)}$$

若以 Mathematica 軟體畫圖，則需先輸入 $Plot[Exp[x]^{-1}\times(\mathrm{Cos}[2\cdot x]+Sin[2\cdot x]]$，{ x ,-1 , 5 }]，然後按 Shift + Enter 鍵，其圖形如以下所示：



(水平軸爲 x 軸，垂直軸爲 y 軸)

習題

1. 微分方程 $y''+Ay'+By=0$；$y(0)=2$；$y'(0)=-3$ 之解（solution）爲
$$y(x)=e^{-x}\left(C\cos\sqrt{2}x+D\sin\sqrt{2}x\right)$$
其他 A、B、C、D 皆爲常數（constant），求算 A、B、C、D 之值。【91 台大生機所 10%】

2. Use the transformation $z=\sin x$ to solve $\frac{d^2y}{dx^2}+(\tan x)\frac{dy}{dx}+(\cos^2 x)y=0$.【90 成大土木所 10%】

3. Solve the initial value problem
$$ay''+by=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,$$
where a and b are constants, but $a\neq 0$.【91 中央機械所 12%】

4. Solve $y''-2y'+10y=0$.【88 中山環工所 10%】

5. Solve the initial value problem $y''+by'+10y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Given (a) b = 7 (b) b = 6.【91 中山通訊所 20%】

6. Two students solve the same initial value problem $y''+ay'+by=0$ with given initial conditions $y(0)=A$ and $y'(0)=B$. Using wrong constants for b and B, one student got the solution $y_A(x)=e^{-2x}(\cos 3x+2\sin 3x)$. Using wrong constants for a and A, the other one got the solution $y_B(x)=-3e^{x}+2e^{3x}$. Find the correct constants for a, b, A, and B and solve the initial value problem.【90 台大電機所 10%】

7. What conditions should be imposed on the constant coefficients a, b and c in order to guarantee that all solutions of the second-order differential equation $ay''+by'+cy=0$ are bounded on the interval $[0,\infty)$?【90 交大電控所 5%】

8. 請解 $y''+4y'+(4+\omega^2)y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=\omega-2$, $\omega\neq 0$.【91 中央光電所 10%】

9. 解 $(2x+1)^2y''+(10x+5)y'+3y=0$.【93 台科營建所】