提要 24：二階常係數齊性 ODE 的解法(二)--重根

爲完整起見，仍將問題之解法詳細說明如下。二階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1}$$

其中 a、b 均爲常數。此一類型之微分方程式，在工程力學上係與自由振動(*Free Vibration*)問題有關，在電學問題上係與電流問題有關。式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 稱爲特徵根(*Characteristic Root*)，爲待解之未知數。再將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

則

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $y=e^{\lambda x}\neq 0$，故：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{3}$$

上式稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{4}$$

因所考慮之情況爲重根，故上式中根號內之運算結果應爲 $a^2-4b=0$，亦即所得出之兩個特徵根 λ_1 與 λ_2 完全相同：

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{-a}{2} \tag{5}$$

故僅能研討出一個問題之解：

$$y(x)=e^{-\frac{a}{2}x} \tag{6}$$

此類問題可利用降階法(*Reduction of Order*)研討出問題之另一解。令式(6)所示之第一個解為 y_1，待求之第二個解為 y_2，因這兩個解係呈線性獨立關係，故其比例關係應與自變數 x 有關：

$$\frac{y_2}{y_1} = u(x) \tag{7}$$

因此可考慮 $y_2 = uy_1$。 y_2 係式(1)之解，故應滿足式(1)所示之方程式：

$$\frac{d^2(uy_1)}{dx^2} + a\frac{d(uy_1)}{dx} + b(uy_1) = 0 \tag{8}$$

上式可進一步化簡為：

$$(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'') + a(u'y_1 + uy_1') + b(uy_1) = 0 \tag{8'}$$

經同類項合併後，可得：

$$u(y_1'' + ay_1' + by_1) + u'(2y_1' + ay_1) + u''y_1 = 0 \tag{8''}$$

其中 $y_1'' + ay_1' + by_1$ 應等於零，因 y_1 是原微分方程式(1)之解；又 $2y_1' + ay_1 = 2(e^{-\frac{a}{2}})' + ae^{-\frac{a}{2}} =$ 0，故式(8")可改寫為：

$$u''y_1 = 0 \tag{9}$$

因為 $y_1 \neq 0$，故 $u'' = 0$，連續兩次對 x 作積分，即可求出 $u = \widetilde{C}_1 x + \widetilde{C}_2$。因只要符合 y_2/y_1 之比值與 x 相關即可，故可考慮 $\widetilde{C}_1 = 1$、$\widetilde{C}_2 = 0$，所以 $y_2 = xy_1$。

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示，亦即：

$$\boxed{y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{-\frac{a}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{a}{2}x}} \tag{10}$$

式(10)稱為問題之通解(*General Solution*)。

範例一
試解出初始值問題之解： $y''+4y'+4y=0$ ， $y(0)=1$ 、 $y'(0)=2$ 。

【解答】

令 $y(x)=e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+4\left(e^{\lambda x}\right)'+4\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+4\lambda+4\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+2)=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=-2 \text{ 、 } \lambda=-2$$

此係呈重根現象，由式(10)得知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}}$$

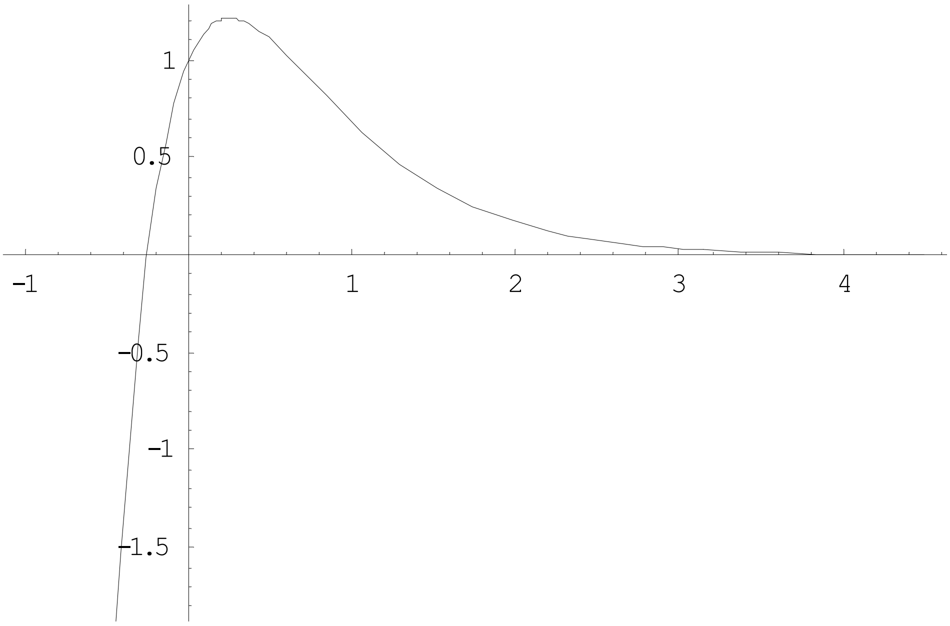
再將初始條件代入通解中，即可求出 C_1 、 C_2 ：

$$\begin{cases}1=C_1e^{-2(0)}+C_2(0)e^{-2(0)}\\ 2=-2C_1e^{-2(0)}+[1-2(0)]C_2e^{-2(0)}\end{cases}$$

可解出 $C_1=1$ 、 $C_2=4$ 。因此，滿足問題之初始條件的**特解(*Particular Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=e^{-2x}+4xe^{-2x}}$$

若以 Mathematica 軟體畫圖，則需先輸入 $Plot[Exp[x]^{-2}+4\times x\times \mathrm{Exp}[x]^{-2}$, { x ,-1 , 4.5 }]，然後按 Shift + Enter 鍵，其圖形如以下所示：



(水平軸為 x 軸，垂直軸為 y 軸)

附註：除非題意有特別的要求，否則並不必刻意使用降階法推求問題之第二個基底 $y_2 = xe^{-2x}$ 。

習題

1. Solve $y''+8y'+16y=0$.【91 朝陽資訊所 10%】

2. Solve $y''-4y'+4y=0$.【88 中山環工所 10%】