提要 23：二階常係數齊性 ODE 的解法(一)--相異實根

相異實根情況與相異複數根時之通解的解法，其觀念完全一樣，之所以會分爲兩部分加以說明，主要是相異複數根時之通解可以利用「尤拉公式(*Euler Formula*)」加以化簡，其詳細情況，將於相異複數根時詳加說明。

二階常係數齊性常微分方程式之標準型式如以下所示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0 \tag{1}$$

其中 a、b 均爲常數。此一類型之微分方程式，在工程力學上係與自由振動(*Free Vibration*)問題有關，在電學問題上係與電流問題有關，容後再詳加說明。

式(1)係自然界中之問題的化身，大自然的問題之解應與大自然的函數有關，此一問題所牽涉之大自然的函數爲自然指數函數(*Exponential Function*)，因此可考慮問題之解爲：

$$y(x)=\exp(\lambda x)=e^{\lambda x} \tag{2}$$

其中 λ 爲待解之未知數，稱爲特徵根(*Characteristic Root*)。再將式(2)代回式(1)：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda x}\right)}{dx^2}+a\frac{d\left(e^{\lambda x}\right)}{dx}+b\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

故

$$\left(\lambda^2+a\lambda+b\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲 $e^{\lambda x}$ 表所假設的解 y，而我們不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$，故需考慮：

$$\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{3}$$

上式係由特徵根所構成之方程式，稱爲特徵方程式(*Characteristic Equation*)。特徵方程式係一元二次方程式，其解可利用因式分解法或以下所示之公式解法研討出：

$$\lambda=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{4}$$

因所考慮之情況爲相異實根，故上式中根號內之運算結果應爲 $a^2-4b>0$。可令所得出之兩個特徵根分別爲 λ_1 與 λ_2：

$$\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\text{、}\lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \tag{5}$$

故所研討出之問題的解分別爲：

$$y(x) = e^{\lambda_1 x} \text{ 、 } y(x) = e^{\lambda_2 x} \tag{6}$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，線齊性微分方程式之解可以疊加方式加以表示：

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}} \tag{7}$$

式(7)稱為問題之通解(*General Solution*)。

範例一
試解出初始值問題之解： $y''+y'-6y=0$ ， $y(0)=1$ 、 $y'(0)=2$ 。

【解答】

令 $y(x)=e^{\lambda x}$ ，代回原式，則

$$\left(e^{\lambda x}\right)''+\left(e^{\lambda x}\right)'-6\left(e^{\lambda x}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+\lambda-6\right)e^{\lambda x}=0$$

因爲不希望所研討出之解爲零，亦即 $e^{\lambda x}\neq 0$ ，故：

$$\lambda^2+\lambda-6=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+3)(\lambda-2)=0$$

故問題之解的特徵根(*Characteristic Root*) λ 爲：

$$\lambda=-3 \text{ 、 } \lambda=2$$

由重疊原理(*Superposition Principle*)知，問題之**通解(*General Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}}$$

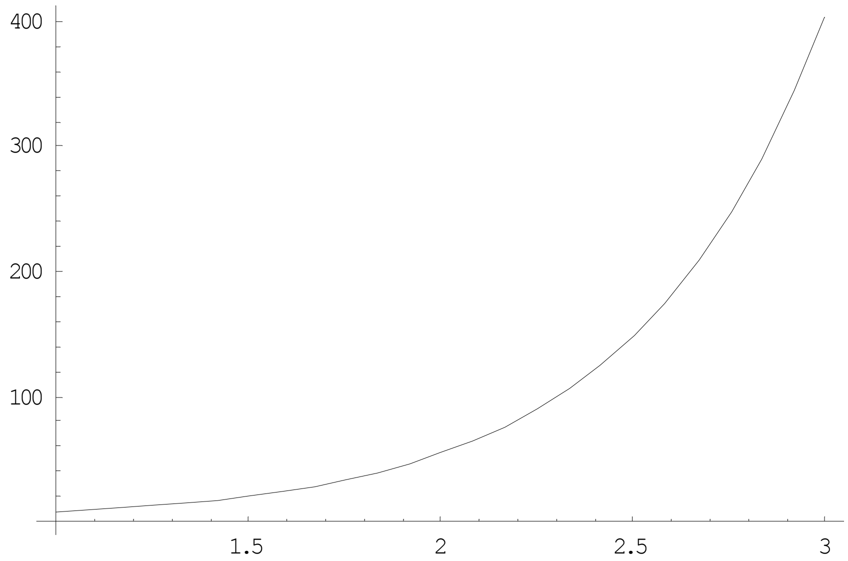
再將初始條件代入通解中，即可求出 C_1 、 C_2 ：

$$\begin{cases}1=C_1e^{-3(0)}+C_2e^{2(0)}\\ 2=-3C_1e^{-3(0)}+2C_2e^{2(0)}\end{cases}$$

可解出 $C_1=0$ 、 $C_2=1$ 。因此，滿足問題之初始條件的**特解(*Particular Solution*)**爲：

$$\boxed{y(x)=e^{2x}}$$

若以 Mathematica 軟體畫圖，則需先輸入 *Plot*[*Exp*[*x*]^2 , { x , 1 , 3 }]，然後按 Shift + Enter 鍵，其圖形如以下所示：



(水平軸爲 x 軸，垂直軸爲 y 軸)

習題

1. Solve $y''+y'-2y=0$.【88 中山環工所 10%】

2. Solve $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.【87 清大電機所 5%】

3. Suppose that a differential equation was found to have the solutions $8\sinh(3x)$ and $12\cosh(3x)$. Please determine the differential equation fits the requirement.【87 成大電機所 5%】

4. Solve the initial value problem $y''+by'+10y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Given (a) $b=7$ (b) $b=6$.【91 中山通訊所 20%】

5. 解初值問題 $4y''+4y'+y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=1$.【90 中央光電所 15%】

6. Solve $xy''-(3x^2+1)y'+2x^3y=0$, $y(0)=0$, $y'(1)=1$.【台大機械所】

7. Solve $(x+1)^2y''-3(x+1)y'+2y=0$ with boundary conditions $y(0)=0$, $y'(1)=3$.【93 成大土木所】