

提要 22：認識重疊原理(Superposition Principle)

重疊原理是求線齊性微分方程式(Linear Homogeneous Differential Equation)：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \quad (1)$$

之解時的重要觀念，其內容如下：

若 y_1 、 y_2 分別為線齊性微分方程式 $\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$ 之解，
則 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (c_1 、 c_2 為任意常數) 亦為原式之解，稱為通解(General Solution)。
其中 y_1 、 y_2 稱為通解中之基底(Basis)。

【證明】

因為 y_1 、 y_2 均為線齊性微分方程式之解，故：

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + p(x) \frac{dy_1}{dx} + q(x)y_1 = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + p(x) \frac{dy_2}{dx} + q(x)y_2 = 0 \quad (2b)$$

以上兩式分別乘以 c_1 、 c_2 ，再相加後可得：

$$\left(c_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} \right) + p(x) \left(c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} \right) + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

並可改寫為：

$$\frac{d^2 (c_1 y_1 + c_2 y_2)}{dx^2} + p(x) \frac{d(c_1 y_1 + c_2 y_2)}{dx} + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = 0$$

由此可知 $c_1 y_1 + c_2 y_2$ 亦為線齊性微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

之解。

附註：

1. 「通解」有時會被稱為「完全解」，因為「General Solution」的另一個名字是「Complete Solution」。
2. 重疊原理僅適用於線齊性微分方程式，以下舉兩反例說明之。

範例一

已知 $y = 2 + \cos x$ 與 $y = 2 + \sin x$ 為非齊性微分方程式 $y'' + y = 2$ 之解，但是 $2(2 + \cos x)$ 或 $(2 + \cos x) + (2 + \sin x)$ 並非原式 $y'' + y = 2$ 之解。

【說明】

(1) 將 $y = 2 + \cos x$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (2 + \cos x)'' + (2 + \cos x) \\ &= -\cos x + 2 + \cos x \\ &= 2 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y = 2 + \cos x$ 確為原式之解。

(2) 將 $y = 2 + \sin x$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (2 + \sin x)'' + (2 + \sin x) \\ &= -\sin x + \sin x + 2 \\ &= 2 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y = 2 + \sin x$ 確為原式之解。

(3) 將 $y = 2(2 + \cos x)$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (4 + 2\cos x)'' + (4 + 2\cos x) \\ &= -2\cos x + 4 + 2\cos x \\ &= 4 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y = 2(2 + \cos x)$ (即 $c_1 = 2$, $c_2 = 0$) 並非原式之解。因為原式為非齊性微分方程式，故重疊原理並不適用。

(4) 將 $y = (2 + \cos x) + (2 + \sin x)$ 代回原式可知

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (4 + \cos x + \sin x)'' + (4 + \cos x + \sin x) \\ &= -\cos x - \sin x + 4 + \cos x + \sin x \\ &= 4 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y = (2 + \cos x) + (2 + \sin x)$ (即 $c_1 = 1$, $c_2 = 1$) 並非原式之解。因為原式為非齊性微分方程式，故重疊原理並不適用。

範例二

已知 $y = x^2$ 與 $y = 1$ 為非線性微分方程式 $yy'' - xy' = 0$ 之解，但是 $y = -x^2$ 與 $y = x^2 + 1$ 並不是非線性微分方程式之解。

【說明】

(1) 將 $y = x^2$ 代回原式

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (x^2)(x^2)'' - x(x^2)' \\ &= (x^2)(2) - x(2x) \\ &= 0 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y = x^2$ 為原式之解。

(2) 將 $y = 1$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (1)(1)'' - x(1)' \\ &= (1)(0) - x(0) \\ &= 0 \\ &= \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y = 1$ 確為原式之解。

(3) 將 $y = -x^2$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (-x^2)(-x^2)'' - x(-x^2)' \\ &= (-x^2)(-2) - x(-2x) \\ &= 2x^2 + 2x^2 \\ &= 4x^2 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

故 $y = -x^2$ (即 $c_1 = -1$ 、 $c_2 = 0$) 並非原式之解，因為原式為非線性微分方程式，故重疊原理並不適用。

(4) 將 $y = x^2 + 1$ 代回原式，則

$$\begin{aligned}\text{等號左邊} &= (x^2 + 1)(x^2 + 1)'' - x(x^2 + 1)' \\ &= (x^2 + 1)(2) - x(2x) \\ &= 2 \\ &\neq \text{等號右邊}\end{aligned}$$

所以 $y = x^2 + 1$ (即 $c_1 = 1$ 、 $c_2 = 1$) 並非原式之解。同理，其原因為原式並不是線性的微分方程式之故，因此重疊原理並不適用。

習題

1. Let the scalar functions $x_1(t)$ and $x_2(t)$ be two different solutions of the following differential equation $\sin t \frac{d^2x}{dt^2} + \cos t \frac{dx}{dt} + x = 5$, then is $3x_1(t) + 7x_2(t)$ also a solution?

Please prove your answer mathematically. A simple yes or no answer is not credited. 【91 交大電控所 10%】