提要 21：認識非齊性微分方程之解

在討論二階線性常微分方程式時，常以下面之微分方程式加以表示：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{1}$$

其中 $p(x)$、$q(x)$稱為此微分方程式之係數(Coefficient)；$r(x)$稱為此微分方程式之非齊性項(Non-homogeneous Term)。若$r(x)\neq 0$，則此常微分方程式稱為**非齊性**常微分方程式；若$r(x)=0$，則此常微分方程式稱為**齊性**常微分方程式。當微分方程式中出現非齊性項$r(x)$時，其通解中就會產生滿足非齊性項$r(x)$之**非齊性解**y_p。因為y_p為式(1)之解，故：

$$\frac{d^2y_p}{dx^2}+p(x)\frac{dy_p}{dx}+q(x)y_p=r(x) \tag{2}$$

而式(1)之通解應為齊性解y_h與非齊性解y_p之和，即

$$\boxed{y=y_h+y_p} \tag{3}$$

以下說明為何另一解會稱為齊性解。因為$y=y_h+y_p$，所以

$$\frac{d^2(y_h+y_p)}{dx^2}+p(x)\frac{d(y_h+y_p)}{dx}+q(x)(y_h+y_p)=r(x)$$

$$\frac{d^2y_h}{dx^2}+\frac{d^2y_p}{dx^2}+p(x)\frac{dy_h}{dx}+p(x)\frac{dy_p}{dx}+q(x)y_h+q(x)y_p=r(x)$$

$$\left[\frac{d^2y_h}{dx^2}+p(x)\frac{dy_h}{dx}+q(x)y_h\right]+\left[\frac{d^2y_p}{dx^2}+p(x)\frac{dy_p}{dx}+q(x)y_p\right]=r(x)$$

由式(2)知，上式可化簡為：

$$\frac{d^2y_h}{dx^2}+p(x)\frac{dy_h}{dx}+q(x)y_h=0 \tag{4}$$

上式中並不包含非齊性項$r(x)$，且 y 被y_h取代了，故y_h稱為齊性微分方程式之解，此即為齊性解。

註：

1. 最重要的結論是式(3)，即通解 y 為：

$$\boxed{\text{通解 } y = \text{ 齊性解 } y_h + \text{ 非齊性解 } y_p}$$

2. 符號 y_h 之下標 h 表示齊性解(Homogeneous Solution)；符號 y_p 之下標 p 表示非齊性解(Non-homogeneous Solution)，因為此解不包含積分常數，故亦可稱之為**特解**(Particular Solution)，因此以下標 p 表示之。

3. 有些工程數學的書將「Homogeneous Solution」譯為「齊次解」、「Non-homogeneous Solution」譯為「非齊次解」。

習題

1. Solve $y' = y^2 - xy + 1$, which has a particular solution $y_p = x$ by inspection.【94 清大電機所 7%】

2. Solve $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$, $y(1) = 3$.【94 中央光電所 10%】

3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2$，已知 $y_1 = \frac{2}{x}$ 為一解，求通解。【91 中原機械所 20%】

4. Solve $\frac{dy}{dx} = x^3 (y - x)^2 + \frac{y}{x}$. Hint: $y_p = x$ is a solution.【92 海洋機械所 20%】